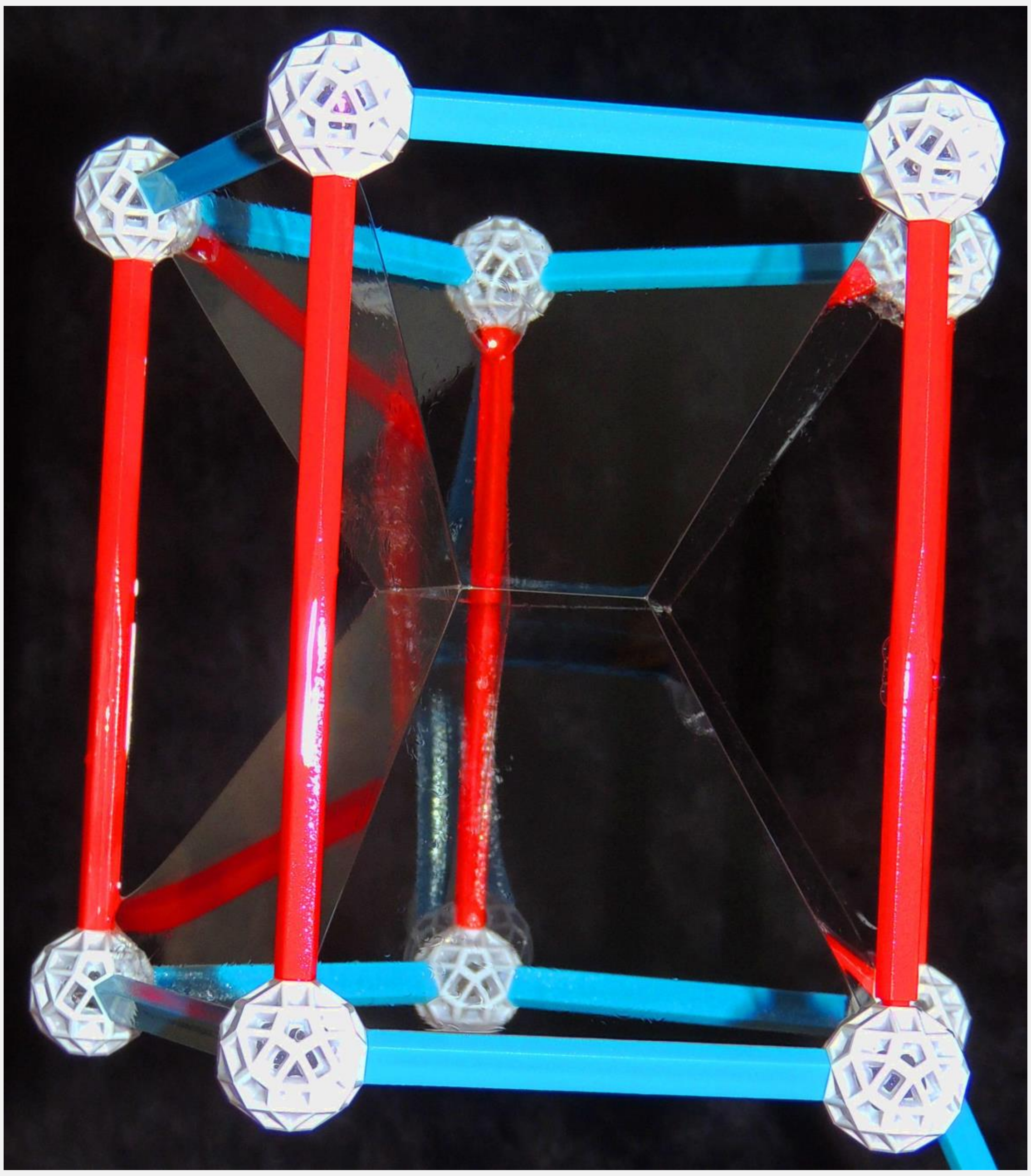
LES MATHÉMATIQUES SAVONNEUSES



Prisme droit plongé dans une solution savonneuse

À la recherche du plus court chemin

Le problème qui consiste à chercher la ou les surfaces minimales qui s'appuient sur un contour donné s'appelle le « Problème de Plateau ».

Les problèmes de la recherche d'objets géométriques optimaux par rapport à des conditions données ont une longue histoire.

Déterminer parmi les figures planes d'un périmètre fixé celle d'aire maximale ; déterminer parmi les courbes planes celle qu'une bille sujette à la gravité parcourt en un temps minimal : autant de problèmes qui avaient déjà attiré l'attention des mathématiciens grecs.

Joseph Plateau, un physicien belge, s'aperçut après de multiples expérimentations qu'un contour fermé simple de forme géométrique quelconque peut servir de support à au moins un film liquide.

De nombreux mathématiciens se sont emparés de ce problème pour étudier les surfaces minimales.

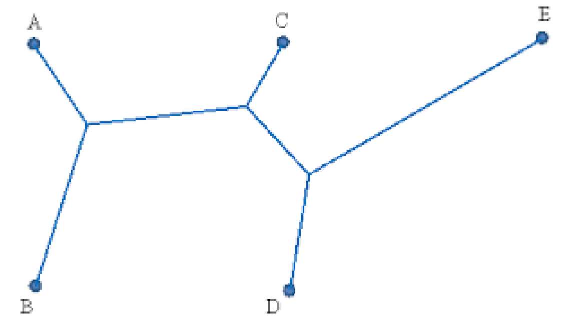
Le problème étant relativement complexe, les mathématiciens se sont ramenés à un problème de longueur minimale.

Un problème qui en découla est le problème de Steiner :

Comment relier des points donnés de sorte que tous les points soient reliés entre eux et que la longueur totale soit minimale ?

Vous venez d'étudier la réponse à ce problème dans le cas de 3 points.

Lorsque le nombre de points devient plus grand, la recherche du plus court chemin fait sans arrêt appel au point de Steiner :



Algorithme du plus court chemin

Au-delà de 4 points, il n'existe plus de « formule » pour calculer la solution optimale du plus court chemin.

Toutefois, un algorithme inventé dans les années 1960 par le mathématicien Melzak permet de trouver le réseau optimal en un nombre fini d'étapes.

Son idée repose sur 2 principes :

- Un point de base est relié à au plus 3 points ;

- Un point de Steiner est relié à trois autres points et les angles formés par les arêtes sont tous égaux à 120°.

Le nombre d'opérations pour relier les n villes avec l'algorithme est proportionnel à n ! ce qui est colossal.

En effet, $n! = n(n-1)(n-2)\ldots\times2\times1$

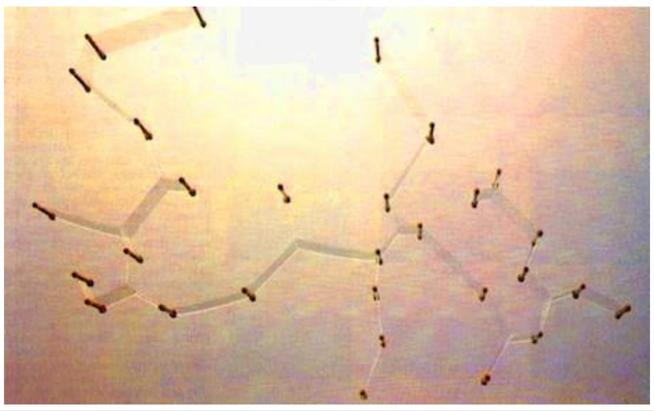
(On a donc $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$)

Pour trouver le réseau optimal entre 10 villes, il ne faut donc pas moins de 3 628 800 opérations.

Les progrès des calculateurs ont permis d'améliorer grandement la rapidité des calculs.

Un test a été fait pour comparer les résultats du savon et ceux de l'algorithme sur les grandes villes d'Amérique du Nord.

Les solutions sont légèrement différentes car le savon ne peut fournir qu'une solution locale.



Frei Otto, un génie de l'architecture

Au cours des 30 dernières années, l'architecte Allemand Frei Otto et son équipe ont conquis une réputation méritée.

Les édifices qu'ils ont réalisés ne sont pas des constructions au sens classique du terme, mais ressemblent plutôt à des espèces de tentes.

À l'exposition universelle de Montréal en 1967, le pavillon allemand se présentait comme une sorte de pavage extraterrestre, constitué d'une nappe de hauteur variable.

Des mâts soutenaient les points élevés du bord, tandis que les points bas de la nappe étaient fixés au sol.

Celle-ci était faite d'un matériau transparent tendu sur un filet de soutien en fils d'acier, reliée aux têtes de mât et aux points d'ancrage par un système de bordures, d'arêtiers, de boucles fermées en œil, fait de câbles métalliques.

Les « boucles en œil » étaient elles-mêmes recouvertes d'un plastique transparent.

Les films de savon offrent un moyen commode de déterminer la forme optimale des surfaces qui s'appuient sur un contour donné.

Si le film ne se rompt pas spontanément, c'est qu'il est en équilibre stable ; il matérialise alors une surface d'aire minimale.

C'est à partir de cette conclusion que Frei Otto et son équipe se sont lancés dans de telles constructions.

Si les toits de Frei Otto ont l'allure de tentes, ce n'est pas par hasard.

Il s'agit dans les deux cas de structures légères, conçues pour être économiques et mettre en œuvre une quantité minimale de matériaux.

Elles doivent de plus être facilement montées, démontées et transportées.

Enfin, la principale force qui agit sur ces structures est un effort de tension, tandis que les mâts et les arcades supports subissent une compression.

Ce genre de structure diffère donc, de façon essentielle, de la plupart des constructions classiques, où l'on emploie d'énormes quantités de matériaux superflus.

Des tunnels d'essais aérodynamiques

Frei Otto et son équipe se sont essentiellement servis de films de savon pour concevoir les architectures.

Après de très nombreuses expériences, ils ont déterminé des formes élégantes et transposables dans des constructions réelles.

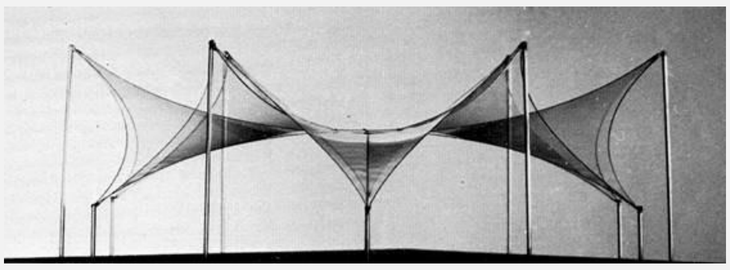
Pour cela, il utilisa un fil de l'épaisseur d'un cheveu, fixé aux extrémités d'aiguilles ou de bâtonnets enfoncés dans les trous d'une plaque de plexiglas.

Si l'on trempe ce système dans une solution savonneuse, puis qu'on le retire, le film de savon tendra les fils et aura une aire minimale. Si les aiguilles supports ont des hauteurs différentes, on voit apparaître une jolie surface en forme de tente.

Pour traduire en formes architecturales ces modèles faits de films de savon, il faut les photographier et les mesurer avec soin.

On réalise ensuite des maquettes assez solides pour pouvoir être essayées dans des tunnels d'essais aérodynamiques. On est ainsi renseigné, grâce à des appareils de mesure spéciaux, sur les efforts engendrés par le vent et la neige.

Dans la construction réelle, des câbles d'acier hautement résistants remplacent le fil ultra-mince qui portait le film de savon ; les toiles sont généralement réalisées en matériaux synthétiques.



Le complexe sportif de Munich comprenant le stade de football, le stade athlétique et la piscine olympique reflètent le talent d'Otto et son équipe.