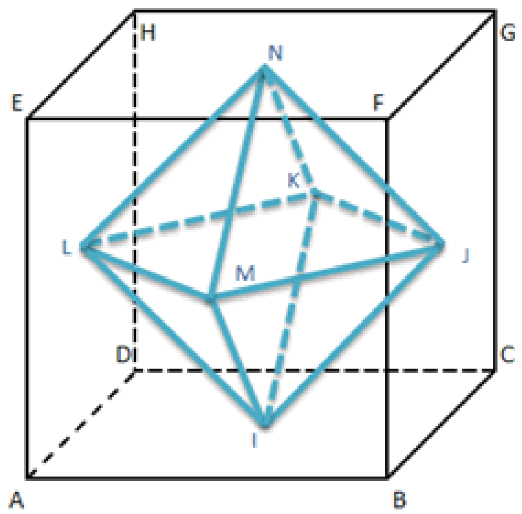
Les solides de Platon

Groupe 1 : le cube et l'octaèdre

Chaque groupe est constitué de 4 personnes qui travaillent en collaboration sur une des 8 fiches.
A la fin de la séance de travail, chaque groupe viendra présenter les résultats trouvés.

Soit le cube ABCDEFGH de centre O et son dual l'octaèdre IJKLMN représenté ci-dessous.

L'arête du cube mesure 10 cm.



1. Calculer l'aire du cube ABCDEFGH ainsi que son volume.
2. **a.** Représenter (de face), la section du cube et du tétraèdre par le plan parallèle à (ABC) passant par 0, le centre du cube.

   b. Calculer la longueur LM.

   c. Montrer que IJKLMN est un octaèdre régulier.
3. **a.** Représenter (de face) une face de l'octaèdre.

   b. Calculer l'aire d'une face de l'octaèdre.

   c. En déduire l'aire totale de l'octaèdre.
4. Calculer le volume de l'octaèdre.
5. Calculer l'aire et le volume de la sphère S circonscrite à l'octaèdre.
6. Déterminer, en pourcentage, le taux de remplissage de l'octaèdre dans sa sphère circonscrite S.

Rappels :

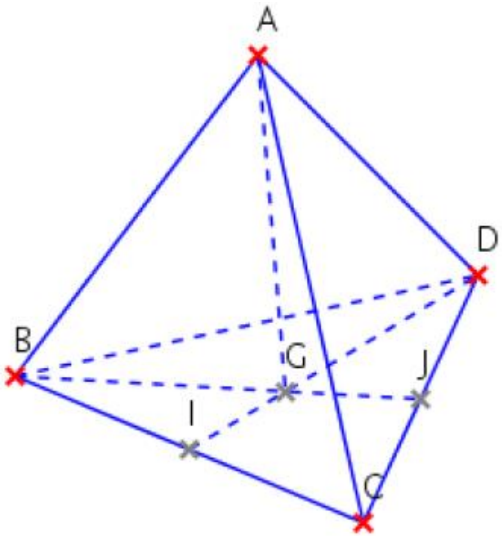
- Le volume d'une pyramide est $\boldsymbol{V} = \frac{1}{3} \times \boldsymbol{\mathcal{A}_{base}} \times \boldsymbol{h}$
- Le volume d'une boule est : $\boldsymbol{V} = \frac{4}{3} \times \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{R^3}$ où R est le rayon de la boule
- L'aire d'une sphère est : $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{4} \times \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{R}^2$ où R est le rayon de la sphère

Les solides de Platon

Groupe 2 : Le tétraèdre

Chaque groupe est constitué de 4 personnes qui travaillent en collaboration sur une des 8 fiches. A la fin de la séance de travail, chaque groupe viendra présenter les résultats trouvés.

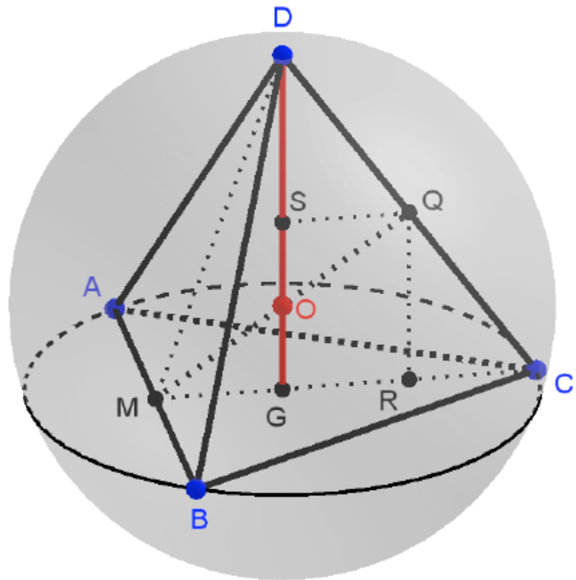
Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête 10 cm.



1. Quelle est la nature des 4 faces ?
2. On appelle I, le milieu de l'arête [BC]. Calculer DI en justifiant chaque étape.
3. On appelle J le milieu de l'arête [CD]. G est le point d'intersection des droites (DI) et (BJ).
   Ce point s'appelle le centre de gravité du triangle BCD.
   On admet que le point G est situé au 2/3 de chaque médiane en partant du sommet.
   Calculer DG.
4. On admet que G est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD), donc que [AG] est la hauteur du tétraèdre ABCD. Calculer la longueur AG.
5. Calculer le volume du tétraèdre.
6. Le tétraèdre est inscrit dans une sphère, de rayon r et de centre O, tel que $OG = \frac{1}{4}DG$.

   a. Calculer le rayon r de la sphère.

   b. En déduire le volume de la boule de rayon r.
7. Déterminer, en pourcentage, le taux de remplissage du tétraèdre dans sa sphère circonscrite.



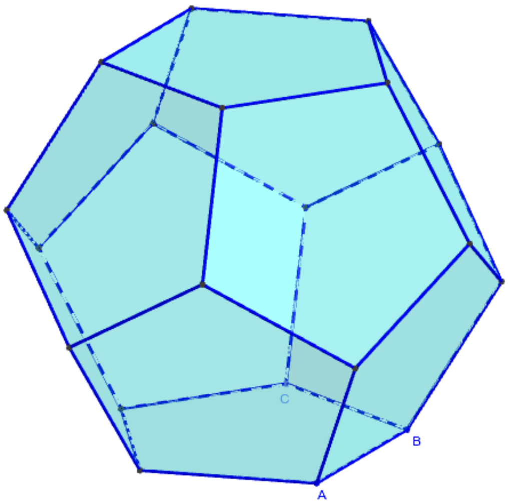
Rappels :

- Le volume d'une pyramide est $\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{base} \times h}$
- Le volume d'une boule est : $\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3}$ où R est le rayon de la boule

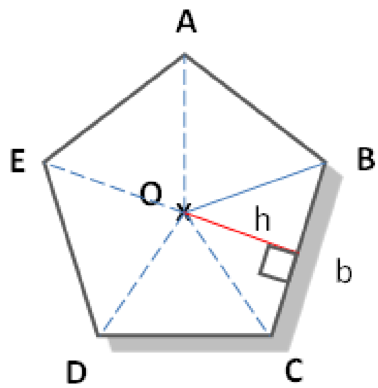
Les solides de Platon

Groupe 3 : le dodécaèdre régulier

Chaque groupe est constitué de 4 personnes qui travaillent en collaboration sur une des 8 fiches.
A la fin de la séance de travail, chaque groupe viendra présenter les résultats trouvés.



1. Le solide ci-dessus est un dodécaèdre régulier.
   a. Quelle est la nature des faces ?
   b. Combien le dodécaèdre comporte-t-il de faces ?
2. On peut constater qu'un pentagone régulier ABCDE est constitué de 5 triangles isocèles, selon la figure ci-dessous. On suppose que les arêtes mesurent 10 cm.
   On admet que le pentagone régulier est inscrit dans un cercle de centre 0 et de rayon
   OA = OB = OC = OD = OE. *On arrondira tous les résultats au centième.*
   a. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{COB}$, $\widehat{BOA}$, $\widehat{AOE}$, $\widehat{EOD}$ *et* $\widehat{DOC}$.
   b. En utilisant la trigonométrie, calculer la longueur OC.
   c. Calculer la hauteur h.
   d. En déduire l'aire d'un triangle OBC.
   e. En déduire l'aire du pentagone ABCDE.



3. Calculer l'aire du dodécaèdre, dont les arêtes mesurent 10 cm.
   On admet que le volume d'un dodécaèdre régulier est donné par
   $V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$.
   En déduire le volume de notre dodécaèdre.
4. Le dodécaèdre est inscrit dans une sphère, de rayon r et de centre O, tel que :

   $$r = \sqrt{3} \times \frac{1+\sqrt{5}}{4}a \qquad \text{où } a \text{ est la longueur des arêtes}$$

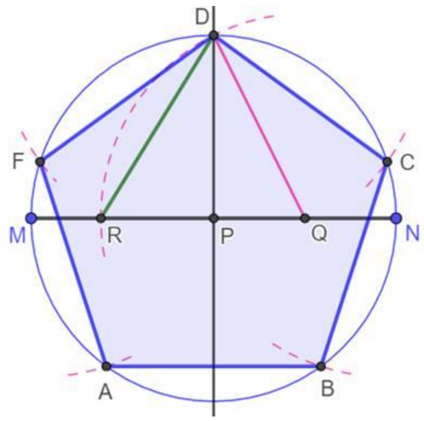
   En déduire le volume de la sphère circonscrite du dodécaèdre d'arête 10 cm.
5. Déterminer, en pourcentage, le taux de remplissage du dodécaèdre dans sa sphère circonscrite.

Rappels : le volume d'une boule est : $\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3}$ où R est le rayon de la boule

Les solides de Platon

Groupe 4 : le pentagone régulier

Chaque groupe est constitué de 4 personnes qui travaillent en collaboration sur une des 8 fiches.
A la fin de la séance de travail, chaque groupe viendra présenter les résultats trouvés.



1. On suppose que le pentagone régulier ABCDE est inscrit dans un cercle de rayon r.

Le but est de construire un pentagone régulier selon la méthode ci-dessous. Pour cela :

- Tracer un segment [MN], puis le milieu P de [MN].
- Tracer le milieu Q de [PN].
- Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre P et de rayon PN.
- Tracer la droite (d) passant par P et perpendiculaire à (MN).
- La droite (d) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en D.
- Tracer le cercle $\mathcal{C}'$ de centre Q et de rayon QD.
- Le cercle $\mathcal{C}'$ coupe (MN) en R.
- La longueur DR est la longueur de l'arête du pentagone.
- A l'aide du compas, reporter cette longueur 4 fois sur le cercle $\mathcal{C}$ qui est le cercle circonscrit au pentagone régulier ABCDE.

2. Le but est de calculer le rayon du cercle circonscrit en fonction du côté du pentagone.

a. Calculer la longueur DQ en fonction r.

b. En déduire la longueur RQ en fonction r.

c. Calculer la longueur DR en fonction de r.

d. Exprimer r en fonction du côté DR.

e. En déduire la valeur du rayon du cercle circonscrit d'un pentagone d'arête 10 cm.

3. **a.** Calculer l'aire du cercle circonscrit d'un pentagone d'arête 10 cm. *Arrondir au centième.*

b. L'aire d'un pentagone régulier de côté a est donnée par $\mathcal{A} = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$.

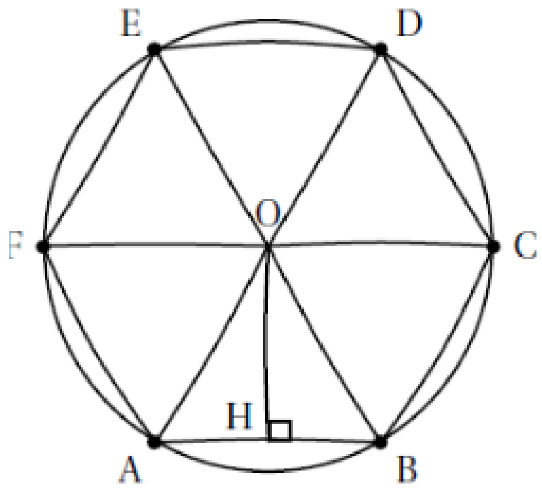
Calculer l'aire de pentagone d'arête 10 cm. *Arrondir au centième.*

c. Déterminer le pourcentage que représente l'aire du pentagone par rapport à celle de son cercle circonscrit. *Arrondir à l'unité.*

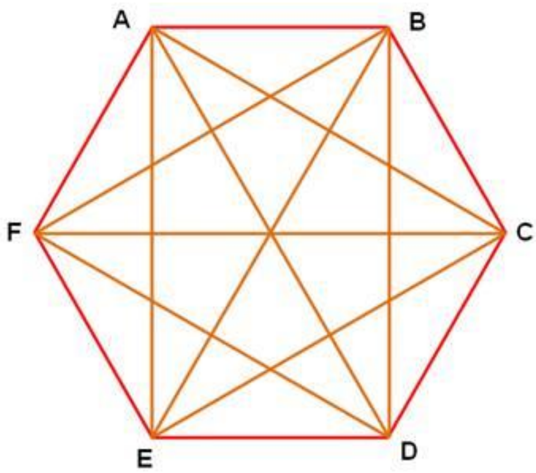
Les solides d'Archimède

Groupe 5 : l'hexagone régulier

Chaque groupe est constitué de 4 personnes qui travaillent en collaboration sur une des 8 fiches.
A la fin de la séance de travail, chaque groupe viendra présenter les résultats trouvés.



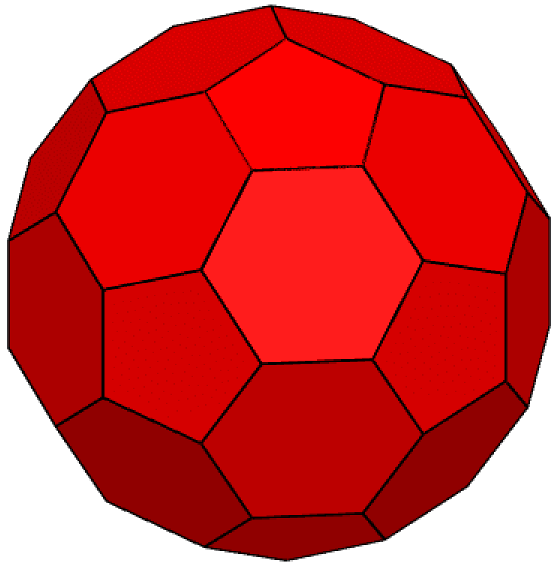
1. On suppose que l'hexagone régulier ABCDEF est inscrit dans un cercle de rayon r.
   On admet que le pentagone régulier est inscrit dans un cercle de centre 0 et de rayon OA = OB = OC = OD = OE.
   - **a.** Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{COB}$, $\widehat{BOA}$, $\widehat{AOF}$, $\widehat{FOE}$, $\widehat{EOD}$ et $\widehat{DOC}$.
   - **b.** Quelle est la nature des triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA ?
   - **c.** En déduire la longueur du côté de l'hexagone en fonction de r.
   - **d.** Calculer la hauteur OH en fonction de r.
   - **e.** Calculer l'aire des triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA en fonction de r.
   - **f.** En déduire l'aire de l'hexagone ABCDEF en fonction de r.
   - **g.** Puis l'aire de l'hexagone ABCDEF de côté 10 cm.
2. Soit C le cercle circonscrit à l'hexagone ABCDEF.
   - **a.** Calculer l'aire du cercle circonscrit d'un hexagone d'arête r.
   - **b.** En déduire l'aire du cercle circonscrit d'un hexagone d'arête 10 cm.
   - **c.** Déterminer le pourcentage que représente l'aire de l'hexagone de côté 10 cm par rapport à celle de son cercle circonscrit. *Arrondir à l'unité.*
3. On considère les diagonales de l'hexagone ABCDEF de côté a, joignant deux sommets séparés d'un seul sommet.
   - **a.** Calculer leur longueur en fonction de a.
   - **b.** Si $a = 1$ m, en déduire la longueur d'une diagonale arrondie au millimètre.



Les solides d'Archimède

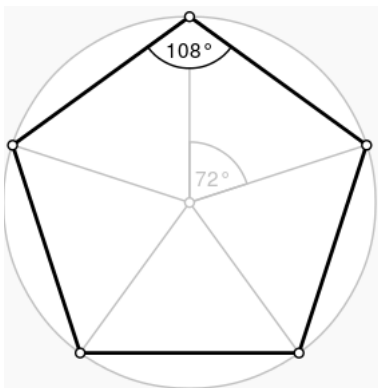
Groupe 6 : l'icosaèdre tronqué

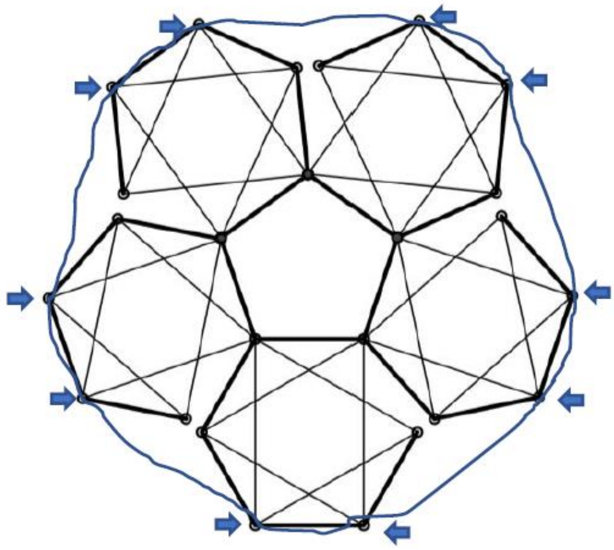
Chaque groupe est constitué de 4 personnes qui travaillent en collaboration sur une des 8 fiches. A la fin de la séance de travail, chaque groupe viendra présenter les résultats trouvés.



Le solide ci-contre est un icosaèdre tronqué.

1. **a.** Quelle est la nature des faces ?
   b. Combien l'icosaèdre tronqué comporte-t-il de faces de chaque sorte ?
2. Pour construire un icosaèdre tronqué, on doit accoler 5 hexagones autour d'un pentagone régulier. Pour consolider la structure, on passe une corde autour des sommets extérieurs. Attention, une fois que les hexagones seront fermés, la structure ne sera plus plane. Ce sera le haut d'autres polygones réguliers.
   Estimer la longueur de cette corde, sachant que les arêtes mesurent 1 mètre. On arrondira au mètre supérieur.





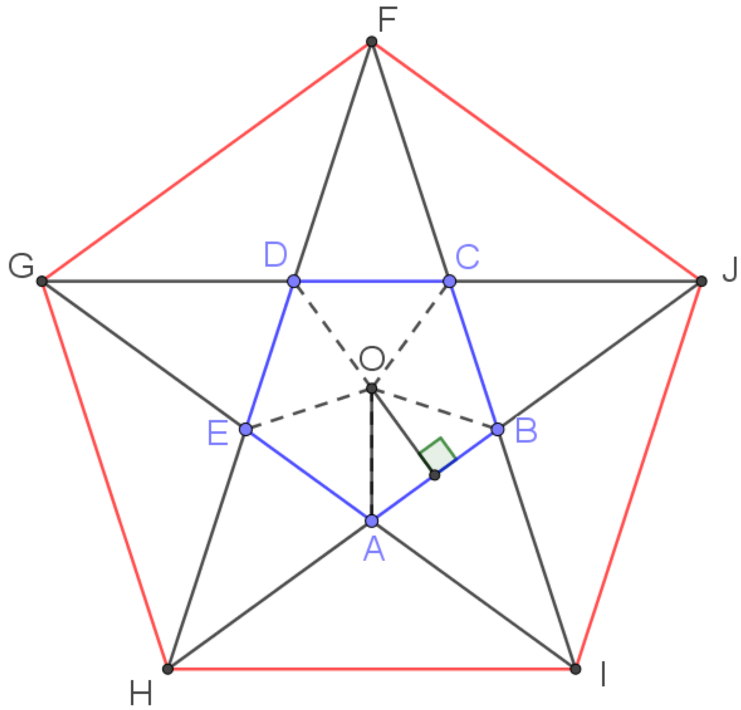
3. Le volume d'un icosaèdre tronqué est donné par $V = \frac{a^3}{4}(125 + 43\sqrt{5})$ où a est la taille de l'arête. On estime que l'icosaèdre tronqué occupe 81,6 % du volume d'une boule dans lequel il est inscrit.
   Donner une estimation au centimètre près de la hauteur de l'icosaèdre tronqué, dont les arêtes mesurent 1 mètre.
   On assimilera la hauteur de l'icosaèdre tronqué à celle de sa sphère circonscrite.
   a. Avec un raisonnement similaire, estimer la hauteur d'un icosaèdre tronqué dont les arêtes mesurent 0,5 mètre ? 2 mètres ?
   b. La hauteur de l'icosaèdre est-elle proportionnelle à la longueur a d'une arête ?

Rappel : le volume d'une boule est : $\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3}$ où R est le rayon de la boule.

Les solides de Kepler-Poinsot

Groupe 7 : le pentagramme

Chaque groupe est constitué de 4 personnes qui travaillent en collaboration sur une des 8 fiches.
A la fin de la séance de travail, chaque groupe viendra présenter les résultats trouvés.



On suppose que le pentagone ABCDE a pour arête 10 cm.

1. **a.** Sachant que la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe à n côtés est égale à $180°(n-2)$, donner la somme des angles intérieurs d'un pentagone.

   b. En déduire la valeur de chaque angle d'un pentagone régulier.

2. Calculer la longueur de la diagonale [AC] du pentagone ABCDE.

3. **a.** Calculer les angles du triangle ACD.

   b. Calculer la longueur de la hauteur issue de A, du triangle ACD.

4. En prolongeant les côtés du pentagone régulier ABCDE, on obtient un **pentagramme**.

   a. Calculer la mesure des angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{ACB}$.

   b. En déduire la mesure des angles du triangle CDF.

   c. Comparer les triangles CDF et ACD et en déduire la longueur FD.

   e. Combien vaut le rapport entre FD et le côté du pentagone ABCDE ?

   Ce rapport s'appelle φ et est égal au nombre d'or.

5. En reliant les sommets extérieurs du pentagramme, on obtient un nouveau pentagone régulier. Quelle est la longueur de son côté ?

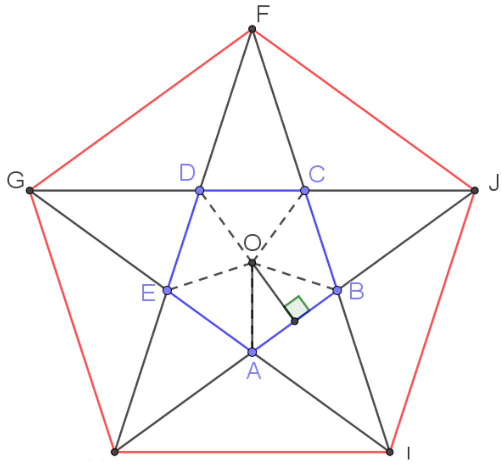
Les solides de Kepler-Poinsot

Groupe 8 : le petit dodécaèdre étoilé

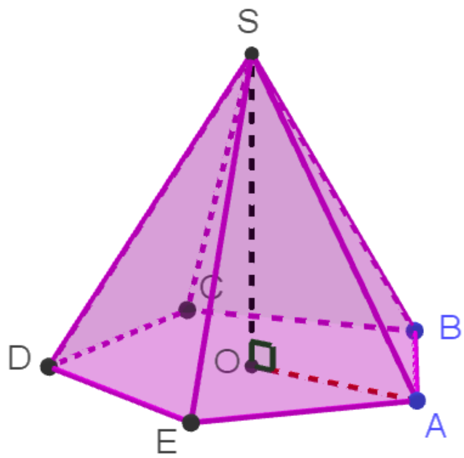
Chaque groupe est constitué de 4 personnes qui travaillent en collaboration sur une des 8 fiches.
A la fin de la séance de travail, chaque groupe viendra présenter les résultats trouvés.

Le petit dodécaèdre étoilé est construit en prolongeant chacun des côtés d'un dodécaèdre régulier.

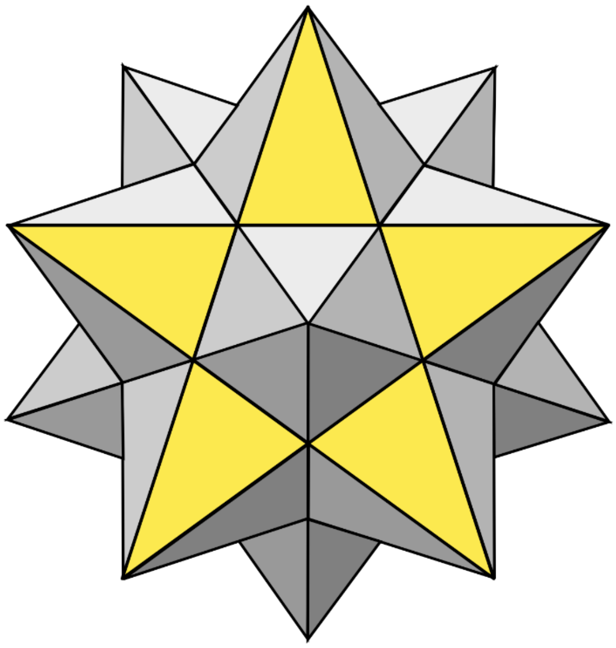
On suppose que $AB = BC = CD = DE = EA = 10$ cm.



1. Chaque pointe du petit dodécaèdre étoilé est une pyramide régulière de base le pentagone ABCDE, qui a pour centre O, avec $SA = SB = SC = SD = SE = 20\sin(54°)$
   a. Quelle est la mesure de chaque angle au centre du pentagone ABCDE.
   b. Calculer la hauteur issue de O du triangle OAB.
   c. En déduire l'aire du pentagone ABCDE.



2. **a.** Quelle est la nature des faces du petit dodécaèdre étoilé ? Donner la longueur des 3 côtés.
   b. Combien y a-t-il de faces dans le petit dodécaèdre étoilé ?
   c. Combien y a-t-il de pyramides dans le petit dodécaèdre étoilé ?
   d. Calculer la hauteur issue de S du triangle SAB.
   e. Calculer l'aire de la face SAB.
   f. En déduire l'aire du petit dodécaèdre étoilé.
3. On se place dans une des pyramides :
   a. Calculer la longueur OA.
   b. Calculer la longueur de la hauteur [SO] de la pyramide SABCDE.
   c. En déduire le volume de cette pyramide.
   d. En déduire le volume du petit dodécaèdre étoilé.



Rappel :

- le volume d'une pyramide est :

$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{base} \times h}$ où h est la hauteur de la pyramide.

- le volume d'un dodécaèdre régulier est : $\boldsymbol{V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4} a^3}$ où a est la longueur de son arête.