

# Activités autour de Maths et Sport

Amandine Aftalion

January 12, 2016

## 1 Ordres de grandeur

Quelles sont les unités de mesure adaptée aux compétitions sportives?

En athlétisme, par exemple, les courses vont du 100m au 40 km. Les temps sont mesurés en secondes (voir 10èmes et 100èmes de secondes, une bonne façon de relier aux nombres décimaux) ou minutes et secondes, ou heures, minutes et secondes. On peut envisager un tableau avec pour les principales distances: 100m, 400m, 800m, 1500m, 5000m, 10000m et marathon, les temps des records pour en déduire la vitesse moyenne de course en m/s et km/h. On pourra faire comparer avec la taille de la cour de récréation, le temps mis par les enfants à la traverser et leur vitesse.

Ordre de grandeur à retenir: le champion du 100m court en 10m/s et l'autruche à 40 km/h environ. Est ce qu'ils courent à peu près à la même vitesse? Et un enfant?

On peut aussi imaginer un texte à trous sur des compétitions où il faut remplacer par les bonnes unités.

## 2 Classement

Classer c'est faire des paquets pour regrouper des objets (ou des personnes). Par exemple, une classe est l'ensemble des enfants qui ont une même maîtresse. L'important dans cette signification du mot « classer », c'est qu'elle regroupe. Mais parfois le critère retenu pour classer est un critère d'ordre qui rejoint celui du mot « ordonner ». Au point que, dans le langage courant, on utilise souvent un des deux mots pour l'autre. Autrement dit un classement est alors une liste ordonnée. Il devient important alors définir un critère de classement.

### 2.1 Classement des sports

On peut classer les sports selon la façon dont on détermine le gagnant :

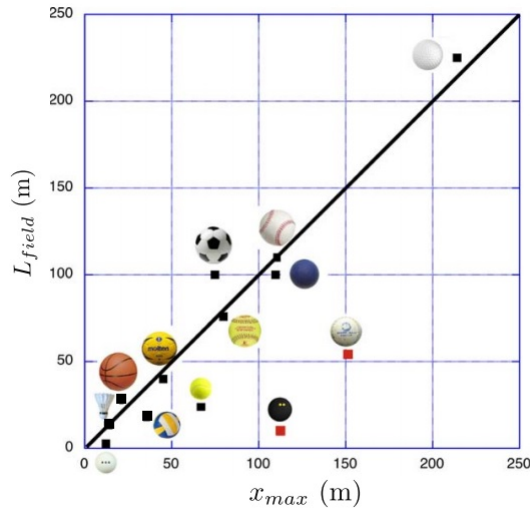


Figure 1: '

Taille du terrain en fonction de la portée maximale de la balle : la relation est presque linéaire

- les sports à record, où il faut réaliser le meilleur temps ou le plus de points (pour lesquels les mathématiques peuvent aider à mesurer ou optimiser la performance),
- les sports en duels où il y a un vainqueur 2 par 2
- les sports jugés (pour lesquels on n'a pas aujourd'hui de modèle permettant de décrire les côtés psychologiques).

Il y a aussi des différences entre les sports individuels et par équipe.

Il y a des sports avec instrument et sans instrument.

On peut proposer aux enfants d'essayer de classer les sports qu'ils connaissent.

Pourquoi un terrain de football fait-il entre 90 et 120 mètres, quand un terrain de basket n'en fait que 28? Un classement des sports de balle a été proposé en fonction de la taille du terrain (Texier et al, IOP 2014): plus la balle peut aller loin, plus le terrain est grand et une relation presque linéaire semble exister.

L'étude de l'instrument, ou la forme des instruments est un domaine où les mathématiques sont actives. Des études ont été faites sur la trajectoire du ballon de football, de la balle de tennis ou du volant de badminton en fonction de la frappe, du tir du javelot, ou du poids. Cela repose au départ sur la seconde loi de Newton, en tenant compte de la résistance de l'air et du type de tir initial. Avec des considérations analogues, on peut comprendre la forme du saut en hauteur ou en étudiant le frottement sur la neige, du saut à ski. La forme des balles et des ballons est elle aussi bien analysée.

## 2.2 Tableau des médailles

Le tableau des médailles par pays aux Jeux Olympiques classe les pays selon un certain ordre. Le classement proposé par le comité olympique international ordonne les pays par nombres de médailles d'or. Afin de départager les ex-aequo les médailles d'argent sont prises en compte, puis les médailles de bronze ... et on s'arrête là. Ce mode de classement est celui du dictionnaire en remplaçant les lettres par le nombre de médailles et en écrivant le nombre de médailles d'or comme première lettre, d'argent en seconde lettre et de bronze en dernière lettre. On parle d'ordre lexicographique.

On pourrait choisir d'autres modèles :

- Affecter un poids à chaque médaille et faire la somme pondérées des médailles obtenues. Le système américain, prendre le nombre total de médailles, revient à donner le même poids à chaque médaille quel que soit son métal. La presse britannique fait référence à un système où l'or vaut 5, l'argent 3 et le bronze 1.
- Donner des poids différents selon les disciplines. Par exemple en tenant compte du nombre de participants à la compétition ou de licenciés. Ou encore différencier les sports individuels et les sports d'équipe.
- Donner des poids différents selon les pays : en fonction de la population, du PIB, du budget des fédérations sportives ... Par exemple, en ramenant à la population et ne tenant compte que des pays ayant au moins trois médailles, c'est la Jamaïque qui sort en tête de liste. La Chine et les États-Unis n'étant pas dans les 30 premiers !
- Donner des poids différents en fonction à la fois de la discipline et du pays !

Peut on fabriquer un classement où la France sort première? (en prenant le tableau des médailles des derniers JO).

## 3 Exercices autour de $\pi$ et du stade

### 3.1 Calcul du rayon d'un stade

Sachant que le couloir 1 (couloir intérieur) d'un stade fait  $400m$ , qu'il est formé de deux demi-cercles ayant le même rayon et de deux lignes droites de  $80m$  chacune, calculer le rayon des demi-cercles.

La longueur des lignes droites peut varier de quelques mètres d'un stade à l'autre. Soit  $L$  la longueur d'une ligne droite, calculer le rayon du couloir 1 en fonction de  $L$ .

Comme chaque ligne droite fait  $80m$ , la longueur des deux virages est  $240m$ . Chaque virage est un demi-cercle, donc les deux ensembles forment un cercle. En

utilisant la relation entre rayon et longueur d'un cercle, on trouve:

$$R = \frac{240}{2\pi} \simeq 38.2.$$

Soit  $V$  la longueur en mètres d'un virage. On peut la calculer en fonction de  $L$ :  $V = (400 - 2L)/2$ . On trouve le rayon en divisant  $V$  par  $\pi$ :

$$R = \frac{400 - 2L}{2\pi}.$$

### 3.2 Calcul de l'angle de décalage

Dans l'épreuve de 400m, les coureurs partent décalés pour que chacun court la même distance. Connaissant le rayon du couloir interne (calculé dans l'exercice 1a) et sachant que la largeur de chaque couloir est 1.22m, calculer l'angle de décalage pour les couloirs 2, 3 et 4 par rapport au premier.

Soient  $\vartheta_i$  l'angle de décalage et  $R_i$  le rayon du couloir  $i$ . On sait que chaque coureur doit courir 400m. Chacun parcourt deux lignes droites, un demi-cercle et un arc de cercle d'angle  $(\pi - \vartheta_i)$ , donc:

$$400 = 2 \times 80 + \pi R_i + (\pi - \vartheta_i)R_i,$$

d'où on trouve:

$$\vartheta_i = 2\pi - \frac{240}{R_i}. \quad (1)$$

On peut voir que plus le rayon augmente, plus l'angle de décalage augmente. On calcule le rayon de chaque couloir comme suit: on sait de l'exercice (1a) que  $R_1 = 38.2m$ ; sachant que chaque couloir est large 1.22m on peut écrire:

$$R_i = R_1 + 1.22(i - 1).$$

Donc on trouve:

$$R_2 = 39.42m \quad R_3 = 40.64m \quad R_4 = 41.86m. \quad (2)$$

En substituant (2) dans (1), on trouve:

$$\vartheta_2 \simeq 0.19 \quad \vartheta_3 \simeq 0.38 \quad \vartheta_4 \simeq 0.55. \quad (3)$$

## 4 Natation

En natation, si on reste sous l'eau, on ne crée pas de vagues, il y a moins de frottements et donc on va plus vite. C'est ainsi que le dauphin l'a compris et nage sous l'eau puis saute hors de l'eau, plutôt que nager à la surface. Dans les 50m nage libre, aux jeux olympiques, c'est souvent celui qui a la plus longue coulée,

c'est à dire qui émerge de l'eau le plus loin qui gagne. Mais la technique qui consiste à faire la longueur sous l'eau a finalement été interdite des compétitions...

Le corps dans l'eau est soumis à différentes forces de friction ou frottement: l'une est liée au frottement de l'eau sur le corps et la deuxième, la traînée de forme, est liée à sa géométrie (dans l'air, on parlerait d'aérodynamique). Cette traînée est liée à l'énergie dissipée en créant des vagues. Plus on s'enfonce dans l'eau, moins cette traînée est forte. Dès qu'on est enfoncé d'une hauteur équivalente à l'épaisseur de son corps, cette force disparaît. D'où le mode privilégié de locomotion en ondulation à quelques mètres sous l'eau. Souvent les enfants commençant à nager le pratiquent et préfèrent nager la brasse sous l'eau en ressortant respirer que rester nager à la surface. Cela pourra être expérimenté en séance de piscine en CP/CE1.

## 5 Dérivée, intégrale et athlétisme

Si  $x(t)$  désigne la distance parcourue depuis le début d'une course, alors la vitesse instantanée  $v(t)$  est reliée à  $x(t)$  par la formule

$$v(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Si, grâce à une montre GPS, ou dans une compétition, on a accès aux temps de passage tous les 50m, cela permet de tracer des points de la courbe  $x(t)$ . On comprend que la vitesse est la tangente à cette courbe. Si en revanche, on a des mesures de vitesse, c'est à dire la courbe  $v(t)$ , alors la distance parcourue est au contraire l'intégrale sous la courbe

$$x(t) = \int_0^t v(s) ds.$$

La vitesse moyenne est reliée aux points mesure tous les 50m puisque la vitesse moyenne entre  $T_1$  et  $T_2$  est

$$\frac{\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt}{T_2 - T_1}.$$

Ceci vaut aussi la distance parcourue pendant cet intervalle de temps divisé par l'intervalle de temps. Ensuite, de la même façon, l'accélération est la dérivée de la vitesse donc on peut relier l'accélération à la pente sur la courbe vitesse/temps.

Remarque : aujourd'hui avec des équations, on sait prédire la courbe de vitesse d'un coureur pour une distance donnée.

## 6 Idées de questions pour un rallye mathématique

- questions sur le lancer de balle et le tir en cloche: pour lancer une balle loin, faut il que je la lance face à moi (dérivée au départ nulle) ou en cloche (légèrement vers le haut)?

- citer des sports collectifs en un minimum de temps, idem sports à instruments etc
- interroger sur les ordres de grandeur: en combien de temps le champion court le 400m? et l'écolier?
- pour courir vite, faut il être très musclé, pas trop musclé ou entre les 2? (R: si on est trop musclé, on est trop lourd et on ne court pas vite, si on ne l'est pas assez, on n'a pas une force de propulsion assez grande).
- si je cours toujours à la même vitesse, quelle est la valeur de mon accélération? est ce que je consomme de l'énergie?
- on met une combinaison pour ne pas avoir froid ou nager plus vite? (R: cela permet de nager plus vite car cela diminue le frottement).
- pourquoi en patin à glace, on accélère quand dans une pirouette on sert les bras contre soi?