Détermination d'un isotope inconnu du vanadium[1]

Cette activité peut être proposée en AP, avec le professeur de mathématiques, dans un objectif de liaison lycée-supérieur

Le vanadium naturel de numéro atomique 23 est composé de deux isotopes : le vanadium 51 stable (99,76 %) et un composé faiblement radioactif, le vanadium 50 (0,24 %). D'autres isotopes ont été produits artificiellement. Parmi les 26 isotopes connus, on donne ici la liste des plus communs munis de leur temps de demi-vie $t_{1/2}$ et de leur mode de désintégration. Le temps de demi-vie correspond à la période radioactive, durée nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs d'une source se soient désintégrés ou, de façon équivalente, le temps au bout duquel l'activité radioactive est divisée par 2.

isotopes	***Demi-vie $T_{1/2}$***	***désintégration***
^{47}V	32,6 min	Capture e^- vers ^{47}Ti
^{48}V	15,98 jours	Capture e^- vers ^{48}Ti
^{49}V	337 jours	Capture e^- vers ^{49}Ti
^{50}V	$1,4.10^{17}$ an	β^+ vers ^{50}Ti
^{51}V	STABLE	
^{52}V	3,76 min	β^- vers ^{52}Cr
^{53}V	1,61 min	β^- vers ^{53}Cr

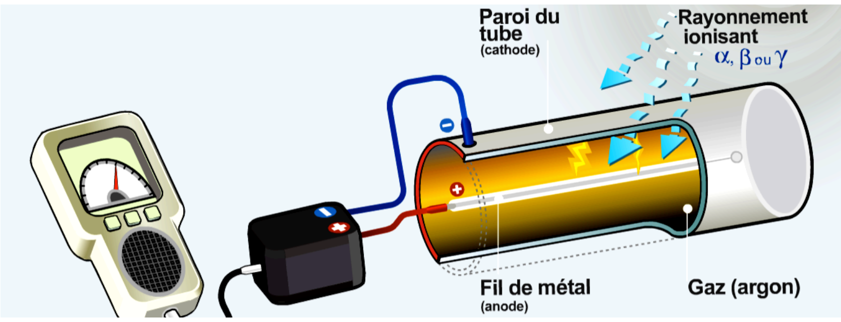
1. La radioactivité du vanadium

Par l'intermédiaire d'un réacteur nucléaire, on bombarde de neutrons un échantillon de vanadium. Par l'étude de la décroissance radioactive de l'échantillon, on veut connaître le nom de l'isotope formé ainsi que son mode de désintégration.

a. Pourquoi les noyaux de vanadium sont-ils qualifiés d'isotopes ?

b. Quelles sont les deux particules élémentaires émises lors de l'émission β^- ?

Fonctionnement du compteur Geiger



Impalpable, sans odeur, couleur ni saveur, la radioactivité est signalée par le crépitement caractéristique du compteur Geiger-Müller, conçu par Hans Geiger en 1913, puis mis au

[1] Activité proposée par Corinne Allodi et Eric Jouguelet

point avec Walther Müller en 1928 (d'après la médiathèque du CEA : http://portail.cea.fr/multimedia).

2. Mesure de l'activité initiale

Un compteur Geiger compte rapidement pendant 1,4 ms le nombre de désintégrations et cela 100 fois de suite. On obtient ainsi la série de valeurs a_1, a_2, a_3, … , a_{100}, considérées comme des mesures de l'activité de départ A_0 du vanadium.

10	5	6	4	8	10	6	4	4	6
9	3	9	7	5	3	5	7	3	6
9	6	10	5	8	4	5	7	6	7
7	4	5	8	12	11	7	15	5	5
8	6	5	7	8	5	11	10	6	7
5	10	5	11	10	10	7	5	6	9
3	7	9	9	5	5	7	8	7	8
9	12	6	8	7	11	4	10	8	5
3	9	5	6	6	7	9	12	5	8
6	6	5	9	6	5	8	6	6	8

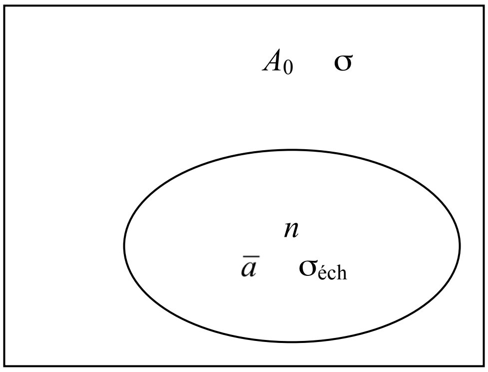
a. Avec la calculatrice, calculer la moyenne $\overline{a}$ de cet échantillon de mesures et l'écart-type estimé de la population $\sigma_{n\text{-}1}$ (noté aussi S_x sur certaines calculatrices) avec :

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \overline{a})^2} \text{ , où } n \text{ est la taille de l'échantillon de mesures.}$$

(Arrondir à 10^{-2}.)
Remarque : la « population » correspond à l'infinité de mesures qu'il serait possible d'effectuer.

b. Lien maths

La théorie de l'échantillonnage montre que dans le cas d'échantillons de taille n, extraits d'une population d'écart-type σ, l'espérance des variances d'échantillons $\sigma^2_{\text{éch}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \overline{a})^2$ vaut $\frac{n-1}{n}\sigma^2$.



Ainsi, puisque $\frac{n-1}{n} < 1$, la moyenne des variances $\sigma^2_{\text{éch}}$ calculées sur un très grand nombre d'échantillons de taille n est inférieure à la variance σ^2 de la population. Cela peut s'expliquer par le fait que la dispersion est moindre dans les échantillons dans lesquels ne figurent pas systématiquement une des valeurs les plus grandes et une des valeurs les plus petites.

• Quelle est l'espérance des variances estimées σ^2_{n-1}, telles que définies à la question a. ?

• *Pour aller plus loin*

À l'aide de la fonction ALEA() du tableur, simuler 1 000 échantillons de taille $n = 10$ extraits d'une population de loi uniforme sur [0, 1]. La population a pour moyenne 0,5 et pour variance $\sigma^2 = \frac{1}{12}$ (on peut vérifier ce calcul). Comparer, par rapport à σ^2, la moyenne sur les 1 000 échantillons des variances d'échantillon $\sigma^2_{\text{éch}}$ et la moyenne des variances estimées σ^2_{n-1}.

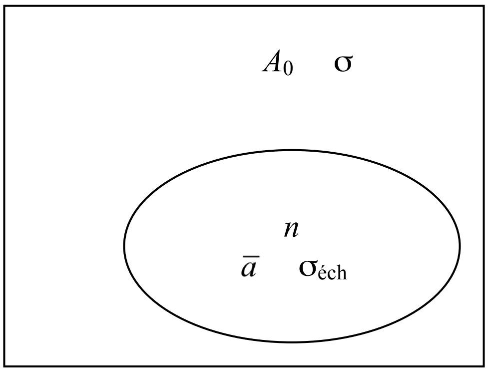
c. On admet que l'intervalle de confiance à 95 % de l'activité A_0 pendant 1,4 ms est de la forme $\left[\bar{a} - 1{,}96 \times \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}, \bar{a} + 1{,}96 \times \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}\right]$.

En déduire que l'activité A_0 de départ du vanadium, exprimée en becquerels, est d'environ (5000 ± 350) Bq.

d. <u>Lien maths</u>

L'activité A_0 du vanadium est considérée comme étant la moyenne d'une population constituée d'une infinité de mesures.

On considère la variable aléatoire $\bar{A}$ qui associe à tout échantillon de taille n la moyenne des n mesures de l'échantillon. On admet que, lorsque n est assez grand, $\bar{A}$ suit la loi normale de moyenne A_0 et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.



• Déterminer $P\left(A_0 - 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{A} \leq A_0 + 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

On montre qu'un intervalle de confiance de A_0 au niveau de confiance de 95 % est fourni, lorsque σ est connu, par $\left[\bar{a} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{a} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Lorsque σ n'est pas connu, comme ici, on le remplace par son estimation σ_{n-1} obtenue à l'aide de l'échantillon de mesures.

• *Pour aller plus loin*

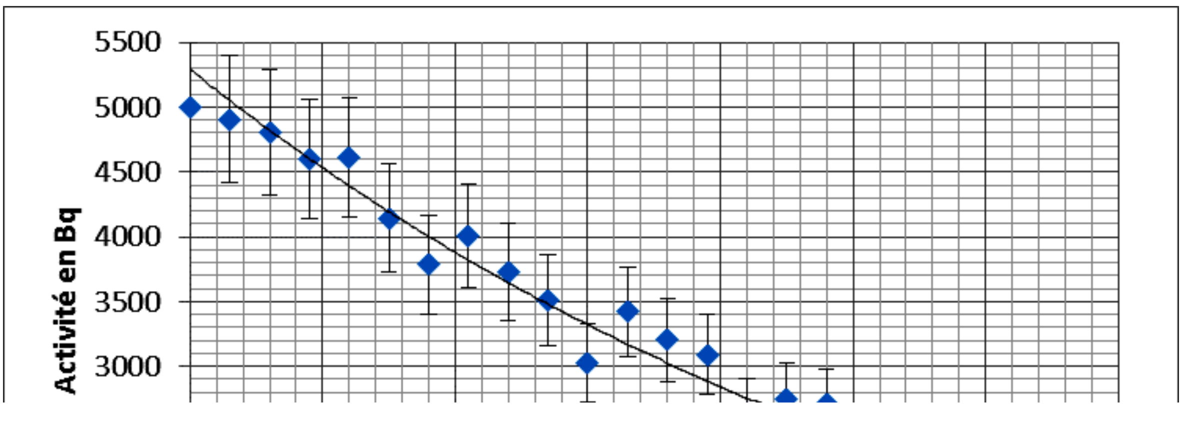
On admet que la formule de tableur =LOI.NORMALE.INVERSE(ALEA();7;2) simule une réalisation d'une variable aléatoire de loi normale de moyenne $\mu = 7$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Simuler 1 000 échantillons de taille $n = 100$ extraits d'une population de loi normale de moyenne $\mu = 7$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Vérifier qu'environ 95 % des intervalles $\left[\bar{a} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{a} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$, calculés à partir des moyennes $\bar{a}$ obtenues sur chaque échantillon, contiennent la valeur $\mu = 7$.

3. Décroissance radioactive

On a tracé ci-dessous la variation de l'activité (avec ses barres d'erreurs obtenues de façon analogue à celle de la question 2.) de l'échantillon de vanadium en fonction du temps.

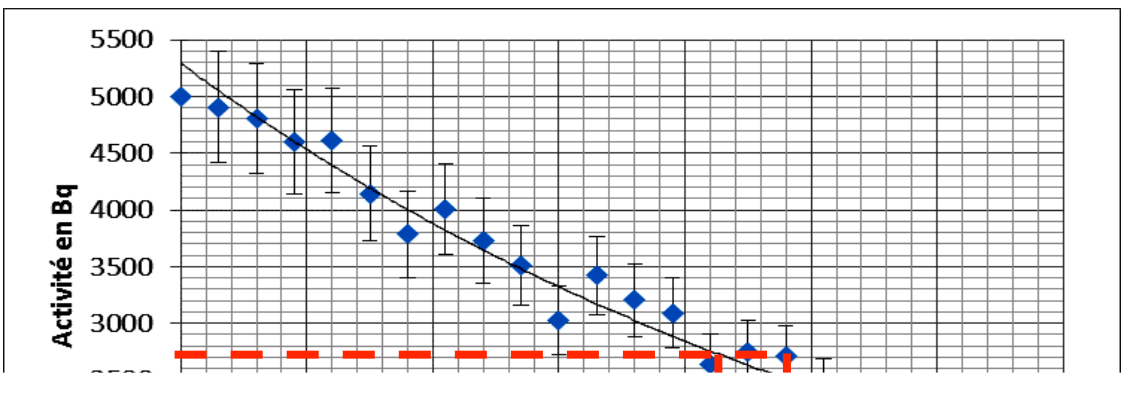


a. À l'aide du graphique, retrouver le temps de demi-vie et estimer son incertitude.

b. En déduire le nom de l'isotope radioactif et son mode de désintégration.

Éléments de réponse

1.a. Ils sont isotopes car ils ont le même nombre de protons pour un nombre de nucléons différent.
1.b. Un électron et un neutrino.
2.a. La calculatrice donne : $\bar{a} = 7$ et $\sigma_{n-1} \approx 2{,}37$.
2.b. On a $\sigma_{n-1}^2 = \dfrac{n}{n-1} \times \sigma_{\text{éch}}^2$. On affirme que l'espérance (la moyenne sur un grand nombre d'échantillons) des variances d'échantillon $\sigma_{\text{éch}}^2$ vaut $\dfrac{n-1}{n} \times \sigma^2$. On en déduit que l'espérance des variances estimées σ_{n-1}^2 vaut $\dfrac{n}{n-1} \times \dfrac{n-1}{n}\ \sigma^2 = \sigma^2$.
Remarque : on utilise la propriété suivante de l'espérance E(k X) = k E(X), où k est un nombre réel et X une variable aléatoire.
2.c. L'intervalle de confiance de A_0 donné par la formule $\left[\bar{a} - 1{,}96 \times \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}},\ \bar{a} + 1{,}96 \times \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}\right]$ vaut environ [6,53 ; 7,47] (en arrondissant les bornes de façon à agrandir l'intervalle) pour une mesure durant 1,4 ms.
Pour revenir au becquerel, on se ramène à une mesure d'une durée d'une seconde et on divise donc par 0,001 4. On obtient $A_0 = (5\,000 \pm 335)$ Bq.
2.d. D'après les propriétés de la loi normale,
$$P\left(A_0 - 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{A} \leq A_0 + 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}95.$$
Remarque :
On en déduit que $P\left(\bar{A} - 1{,}96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq A_0 \leq \bar{A} + 1{,}96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}95$. Ce qui conduit à affirmer que l'intervalle $\left[\bar{a} - 1{,}96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{a} + 1{,}96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance à 95 % de A_0 lorsque σ est connu.
3.a. Au temps de demi-vie, la moitié de la population initiale des noyaux est désintégrée. On lit sur le graphique l'antécédent de 2 500 soit environ 240 s.



En utilisant un intervalle de confiance d'amplitude analogue à celle des mesures effectuées au temps 240 s, on obtient graphiquement une estimation du temps de demi-vie par l'intervalle [220 s ; 280 s], c'est-à-dire, environ [3,5 min ; 4,7 min].

3.b. Il s'agit du vanadium 52 avec une désintégration β^-.