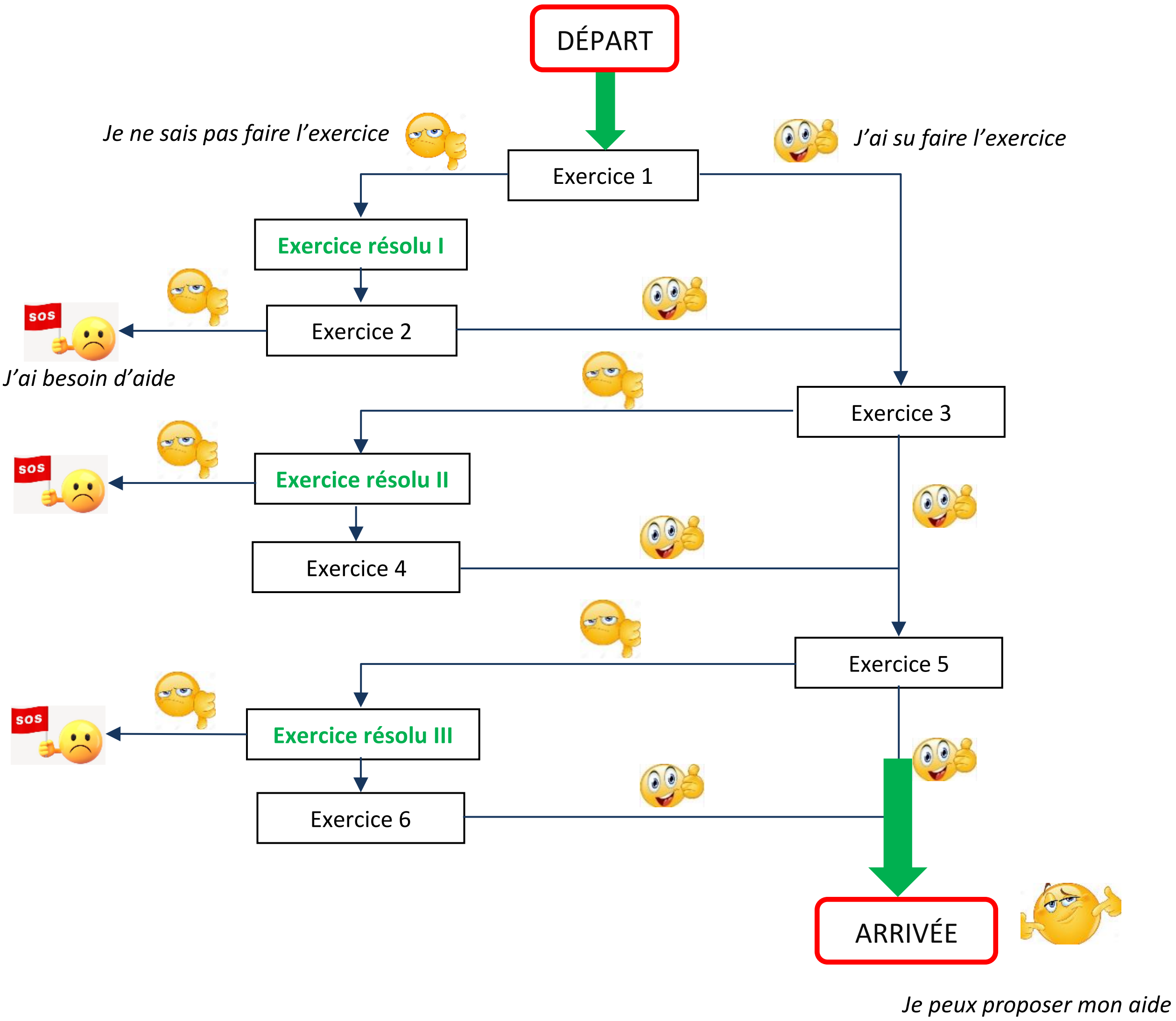
Liaison BCP-BTS	Primitives – Parcours fléché



Primitives d'une fonction

Exercice 1 :
Montrer que la fonction F, définie par $F(x) = 4x^3 - 5x^2 + 4x - 8$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = 12x^2 - 10x + 4$.

Exercice 2
Montrer que la fonction G, définie par $G(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x$ est une primitive de la fonction g définie par $f(x) = 3x^2 - x + 5$.

Exercice 3 Déterminer les primitives des fonctions.
1) $f(x) = 2x + 1$
2) $g(x) = -x - 4$
3) $g(x) = 6x^2 - 3x + \frac{1}{x}$
4) $i(x) = 0{,}3x^2 + \frac{x}{2} + \frac{7}{x}$

Exercice 4 Déterminer les primitives des fonctions.
1) $f(x) = 3x + 4$
2) $g(x) = 12x^2 - 6x + \frac{5}{x}$
3) $h(x) = -\frac{2}{x} + 4x^2 + \frac{x}{3} - 1$

Exercice 5
1) Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x - 2$. Déterminer la primitive qui vérifie F(1) = 0
2) Soit g la fonction définie par $g(x) = 3x^2 - x$. Déterminer la primitive qui vérifie G(2) = 3

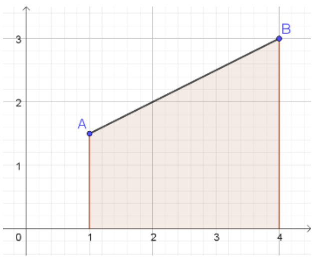
Exercice 6
1) Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x+7$. Déterminer la primitive qui vérifie F(1) = 0
2) Soit g la fonction définie par $g(x) = 6x-2$. Déterminer la primitive qui vérifie G(1) = 5

Calculs d'aires et d'intégrales

Exercice 5 Aire d'un trapèze.
1) Calculer l'aire A de la partie colorée.

Rappel : $A = \dfrac{(B + b) \times h}{2}$

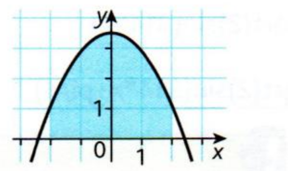
2) Le segment [AB] peut être associé à la fonction f définie sur [1 ; 4] par $f(x) = 0{,}5x + 1$.

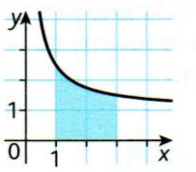


a) Exprimer A sous la forme d'une intégrale.
b) Retrouver la valeur de A avec $A = F(4) - F(1)$.

Exercice 6 Voici les représentations graphiques de deux fonctions f et g.

$f(x) = -0{,}5x^2 + 3{,}5$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{1{,}5}{x} + 1$





1) Pour chaque fonction, exprimer l'aire de la partie colorée sous la forme une intégrale.
2) Calculer l'aire de chaque partie colorée.

Exercice 7 Calculer les intégrales suivantes.

$I_1 = \int_0^1 x^2 dx \qquad I_2 = \int_{-1}^2 (2x + 3)dx$

Exercice 8 Calculer les intégrales suivantes.

$I_1 = \int_0^3 (4x + 1)dx \qquad I_2 = \int_{-1}^2 (3 - 0{,}6x^2)dx$

$I_3 = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)dx \qquad I_4 = \int_{-1}^5 (-0{,}75x^2 + 3x + 5)dx$

Intégrales en électricité avec GeoGebra

Exercice 9 Puissance absorbée par un moteur.
Un moteur électrique monophasé alimenté sous une tension $u(t) = 24\sqrt{2}\sin(314t)$ est traversé par un courant $i(t) = 5\sqrt{2}\sin(314t - \frac{\pi}{4})$ où t représente le temps, en s.

La puissance instantanée est donnée par $p(t) = u(t) \times i(t)$.
1) Dans GeoGebra, régler l'affichage graphique de -0,02 à 0,03 sur x et de -100 à 250 sur y.
2) Obtenir les représentations graphiques de u, i et p.
Attention, dans la zone de saisie, écrire x à la place de t.
La racine carrée de x s'obtient en saisissant sqrt(x).
3) Déterminer l'intégrale de 0 à 0,01 de $p(x)$ en écrivant dans la zone de saisie : intégrale[p,0,0.01].
4) Déterminer la valeur moyenne de $p(x)$ en saisissant :
$Pmoy = a/0.01$, a étant l'intégrale précédente.
5) Calculer la puissance absorbée par le moteur avec la formule $P = UI\cos(\varphi)$ avec $U = 24$ V, $I = 5$ A et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ rad.
6) Comparer $Pmoy$ et P.

Exercice 10 Valeur efficace d'une tension électrique.
La valeur efficace U d'une tension $u(t)$ est définie par :

$$U = \sqrt{<u^2(t)>} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt\right)^{½}$$

1) Obtenir la représentation graphique de la tension définie par $u(t) = 1{,}5\sqrt{2}\sin(t)$.
2) Obtenir son carré u^2.
3) Déterminer l'intégrale de u^2 sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Remarque : la période de u est 2π, celle de u^2 est π.

4) Déterminer $<u^2>$ en divisant le résultat précédent par π.
5) Déterminer U.
6) Retrouver le résultat obtenu avec la formule $U = \dfrac{U_{max}}{\sqrt{2}}$.

Liaison BCP-BTS	Calcul intégral - Exercices résolus

Exercice I Montrer qu'une fonction est une primitive d'une autre

Soit F, la fonction définie par $F(x) = \frac{5}{3}x^3 + 3\,x^2 - 2x + 4$ et f, la fonction définie par $f(x) = 5\,x^2 + 6x - 2$.

$F'(x) = \frac{5}{3} \times 3x^2 + 3 \times 2x - 2 = 5\,x^2 + 6x - 2 = f(x)$. Donc F est une primitive de f

Exercice II Déterminer les primitives des fonctions.

1) $f(x) = 8x + 3$

$F(x) = 8\times\frac{x^2}{2} + 3x + c = 4x^2 + 3x + c$ *On a utilisé les formules du tableau des primitives. Penser à simplifier.*

2) $g(x) = 12x^2 + \frac{x}{2} - 5$

$G(x) = 12\times\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2} - 5x + c = 4x^3 + \frac{x^2}{4} - 5x + c$ *Même remarque.*

3) $k(x) = 5\,x^4 + \frac{3}{x}$ On remarque que $\frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$ donc $K(x) = 5\times\frac{x^5}{5} + 3\ln x + c = x^5 + 3\ln x + c$ *Même remarque.*

Exercice III Déterminer la primitive de f qui vérifie F(1) = 0.

$f(x) = 2x + 5$

$F(x) = 2\times\frac{x^2}{2} + 5x + c = x^2 + 5x + c$

$F(1) = 1^2 + 5\times 1 + c = 6 + c$

Si F(1) = 0 alors c = -6 donc la primitive cherchée est $F(x) = x^2 + 5x - 6$

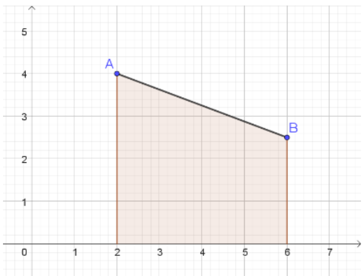
Exercice III Déterminer la primitive de la fonction f définie par $f(x) = -3x^2 + 4x$ et qui vérifie F(2) = 1

$F(x) = -3\times\frac{x^3}{3} + 4\times\frac{x^2}{2} + c = -x^3 + 2x^2 + c$

$F(2) = -2^3 + 5\times 2^2 + c = -8 + 20 + c = 12 + c$

Si F(2) = 1 alors 12 + c = 1 soit c = -11 donc la primitive cherchée est $F(x) = -x^3 + 2x^2 - 11$

Exercice IV Aire d'un trapèze.



1) Calculer l'aire A de la partie colorée.

Rappel : $A = \frac{(B + b)\times h}{2}$

B et b sont les côtés parallèles du trapèze, h est sa "largeur".

$A = \frac{(4 + 2{,}5)\times 4}{2} = 6{,}5 \times 2 = 13$ u.a

2) Le segment [AB] peut être associé à la fonction f définie sur [2 ; 6] par $f(x) = -0{,}375x + 4{,}75$.

a) Exprimer A sous la forme d'une intégrale.

$A = \int_2^6 f(x)dx = \int_2^6 (-0{,}375x + 4{,}75)dx$

b) Retrouver la valeur de A avec A = F(6) – F(2).

$F(x) = -0{,}375\times\frac{x^2}{2} + 4{,}75x + c$

$F(6) = 21{,}75 + c$ et $F(2) = 8{,}75 + c$ *Vérifiez !*

$A = F(6) - F(2) = 21{,}75 - 8{,}75 = 13$ u.a *Remarquez que la constante c s'annule dans une intégrale !*

Exercice V Calculer l'intégrale suivante.

$I = \int_1^2 (3x^2 - 2)dx$

$F(x) = x^3 - 2x + c$

$F(2) = 4 + c$ et $F(1) = -1 + c$ *Vérifiez !*

$I = F(2) - F(1) = 4 - (-1) = 4 + 1 = 5$ *Remarquez qu'il n'a pas été tenu compte de la constance c …. Puisqu'elle s'annule !*