Activités/Cours	Calcul intégral Pour BTS Groupement B

<u>Prérequis élèves</u> :

- Fonctions de référence et opérations sur les fonctions (affine, carré, puissance, cube, log et exponentielle)

- Vérification des acquis sur les fonctions.

- Compléments sur la dérivation : fonctions élémentaires : x^n , $1/x$

opérations sur les dérivées de u^n, ku, u x v , u/v

<u>Contextualisation</u> :

Activité préparatoire BTS CPRP, AMCR, MTE ET MV

Automatismes : transformations de formules

➢ **Activité 1** ***<u>Comment déterminer les primitives d'une fonction ?</u>***

Jordan a pour loisir le pilotage d'une voiture miniature à moteur électrique radio-commandée.
Il participe à une course qui se déroule sur une piste droite de 20 m de long.
On considère que les voitures participantes ont un mouvement rectiligne uniformément accéléré.
La voiture de Jordan a parcouru les 20 m en un temps de 2,5 s.

<u>Problématique</u> : Quelle est la vitesse maximale atteinte par la voiture ?

<u>Aide</u> :
Si l'accélération a (en m/s²) est constante et la vitesse initiale nulle, la distance d (en m) parcourue en fonction du temps t (en s) est :
$d(t) = 0,5\,at^2$

La vitesse v (en m/s) se calcule par la relation :
$v(t) = at$

1- Calculer la valeur de l'accélération a de la voiture. **Arrondir** à l'unité.

....

2- Montrer que d(t) peut s'écrire sous la forme $d(t) = 3,2t^2$.

....

3- Donner l'expression de la vitesse v(t) en fonction du temps t.

....

4- Donner l'expression de la dérivée d'(t).

....

5- Comparer d'(t) et v(t).

....

6- Répondre à la problématique.

....

Selon le point de départ choisi, les relations qui donnent la distance d en fonction du temps t peuvent être différentes.

7- Si la relation est $d_1(t) = 3{,}2t^2 + 5$, **donner** l'expression de la dérivée $d_1'(t)$.

....

8- Comparer $d_1'(t)$ avec la vitesse v(t) de la question 3.

....

On dit que $d_1(t)$ est une .... de v(t).

9- Compléter le tableau suivant**.**

d(t)	$3{,}2t^2 + 10$	$3{,}2t^2 + 2t$	$3{,}2t^2 + 2$	$1{,}6t^2$
d'(t)				

10- Parmi les expressions d(t) du tableau précédent, **indiquer** celles qui sont une primitive de v(t) = 6,4t.

....

A retenir :

Une fonction F est une primitive d'une fonction *f* sur un intervalle I si, pour tout x de l'intervalle I, *f* est la dérivée de F : $F'(x) = f(x)$.

Toutes les primitives de la fonction *f* sont les fonctions définies par $F(x) + k$ où k est une constante quelconque.

Le tableau suivant donne les primitives de fonctions usuelles.

Fonction f	Primitive F
$f(x) = a$ (a : nombre donné)	$F(x) = ax + k$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + k$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \dfrac{x^3}{3} + k$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \dfrac{x^4}{4} + k$
$f(x) = x^n$; $n \neq -1$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x > 0$	$F(x) = \ln x + k$
$u(x) + v(x)$	$U(x) + V(x)$
$a.u(x)$	$a.U(x)$

Exemples : **Déterminer** les primitives des fonctions f suivantes :

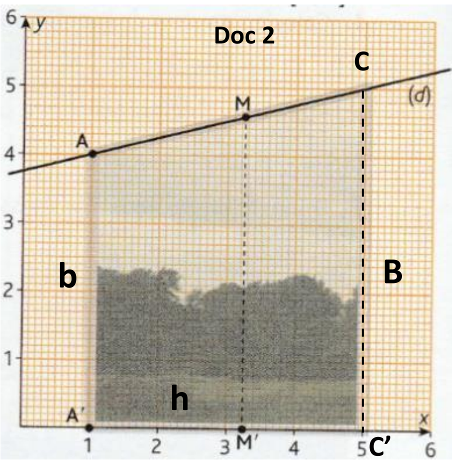
- $f(x) = 2 - x$ F(x) = ...
- $f(x) = x^2 - 1$ F(x) = ...
- $f(x) = \frac{17}{x}$ F(x) = ...
- $f(x) = 5x^2 - 2x$ F(x) = ...
- $f(x) = x^3 + 0{,}6x^2 + 4$ F(x) = ...

➢ **Activité 2** ***Comment calculer l'intégrale d'une fonction ?***

Doc 1

Un artisan vitrier doit remplacer la vitre supérieure de la fenêtre d'un client.
Cette vitre a la forme d'un trapèze (voir doc 1).
Afin de préparer la coupe du verre, l'artisan doit calculer l'aire de cette vitre.

On modélise la vitre par le trapèze représenté dans un repère d'unité 1dm (doc 2).
Les points A(1 ; 4) et M(x ; 0,25+ 3,75) appartiennent à la droite(d).



1- Donner les longueurs des bases b et B et la hauteur du trapèze h.

....

2- a) Calculer, dans ces conditions,en dm², l'aire de la vitre AA'C'C à l'aide de la formule (doc 3)

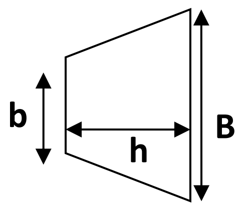
....

....

b) Convertir cette aire en cm².

....

Doc 3



Aire d'un trapèze :

$$\frac{(b+B)\times h}{2}$$

La droite (d) représente graphiquement la fonction f définie par f(x) = 0,25x+3,75 sur l'intervalle [1 ; 5].
On modélise l'aire du trapèze délimité par la droite (d) et par les segments [AA'], [MM'] et [A'M'] par :

$$\mathbf{F(x) = 0{,}125x^2 + 3{,}75x - 3{,}875.}$$

3- F' désigne la dérivée de la fonction F. **Donner** l'expression de F'(x).

....

4- Que représente la fonction F par rapport à la fonction *f* ?

....

5- Calculer les valeurs suivantes :

F(1) = ... F(5) = ... F(5) – F(1) = ...

6- Comparer le nombre F(5) – F(1) avec l'aire de la vitre en dm².

....

Le nombre F(5) – F(1) est l'<u>intégrale</u> de la fonction *f* définie entre 1 et 5, elle est notée $\int_1^5 f(x)\, d(x)$.

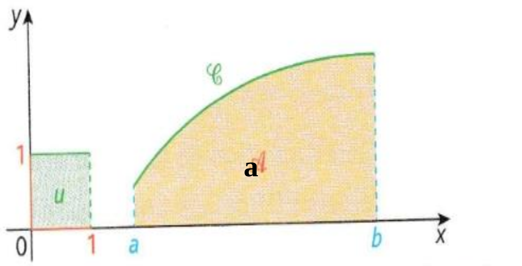
<u>A retenir</u> :

Soit F une primitive de la fonction *f* définie sur l'intervalle [a ; b].

- **L'intégrale de *f* définie entre a et b est la différence F(b) – F(a), elle est notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et se prononce « somme de a à b de *f*(*x*) d*x* ».**

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}(x) = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

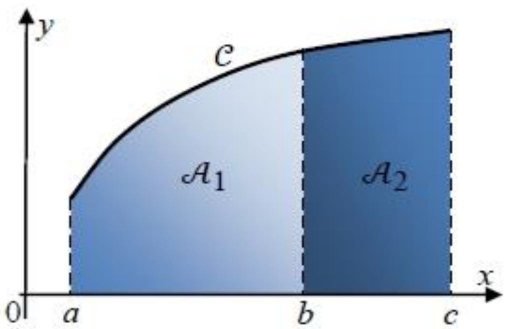
- **Pour une fonction f positive, l'intégrale de *f* entre a et b est l'aire a du domaine défini par sa courbe représentative c, l'axe des abscisses et les droites d'équations *x* = a et *x* = b.**



L'unité d'aire *u* est définie par les unités du repère.

- **<u>Propriétés</u> :**

• **Relation de Chasles :**



$\mathcal{A}_1 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$\mathcal{A}_2 = \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

$\mathcal{A} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

avec $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ d'où :

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \qquad}$$

- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x =$
- $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x =$