

Activité 1 : Doubler un capital

« Placement préféré des français », le livret A est un compte d'épargne rémunéré dont les fonds sont disponibles à tout moment. Les intérêts sont exonérés d'impôt sur le revenu et de prélèvements sociaux.

Suivant les préconisations de la Banque de France, approuvées par le ministre de l'Économie, le taux d'intérêt du livret A est passé à de 3 % lors de la révision du 1^{er} février 2023.

Problématique : Un capital de 2000 € est placé sur un livret A au taux de 3 %. Dans combien de temps aura-t-il doublé ?

On note u_n la valeur acquise par le capital au bout de n années. Ainsi $u_0 = 2000$.

1. Calculer la valeur acquise par le capital au bout d'un an et au bout de deux ans.

.....

.....

	0	1	2
SA			

2. Comparer les rapports u_1/u_0 et u_2/u_1 .

.....

.....

	0	1	2
RE			

La suite (u_n) des valeurs acquises est une **suite géométrique** :

- Chaque terme de la suite est obtenu à partir du précédent en toujours par le même nombre.
- Ce nombre est la **raison q** de la suite. Ici $q = \dots\dots\dots$
- On a donc la relation $u_{n+1} = u_n \times q$ et celles-ci plus pratiques : $u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

3. Exprimer u_n en fonction de u_0 et de n .

.....

	0	1	2
SA			

4. Retrouver les résultats de la question 1 en complétant et en testant la fonction suivante.

```
def u(n) :
    return .....
```

	0	1	2
AR			
RE			

5. Compléter ce script afin qu'il réponde à la problématique.

```
def u() :
    u = .....
    q = .....
    n = .....
    while u < ..... :
        u = .....
        n = .....
    return (n,u)
```

	0	1	2
AR			

6. Tester le script puis répondre à la problématique.

	0	1	2
VA			
CO			

7. Écrire et résoudre l'équation permettant de retrouver par le calcul la réponse à la problématique.

Pour résoudre l'équation, utiliser ces propriétés des logarithmes :

$$a = b \Leftrightarrow \log(a) = \log(b)$$

$$\log(a^n) = n \times \log(a)$$

	0	1	2
AR			
RE			

8. Compléter le script suivant afin d'obtenir la représentation graphique de u_n en fonction de n jusqu'au rang 100.

```

• import matplotlib.pyplot as plt

• x = [n for n in range(101)]           # liste des rangs
• y = [..... for n in range (101)]    # liste des valeurs acquises

• plt.scatter(x,y)                     # nuage de points (xi,yi)
• plt.show()

```

	0	1	2
AR			
RE			

- La représentation graphique d'une suite géométrique est celle d'une fonction
- Pour $u_0 > 0$: Si $q > 1$, la suite est Si $0 < q < 1$, la suite est
Pour $u_0 < 0$: C'est l'inverse.

Activité 2 : La légende du jeu d'échecs

Une ancienne légende raconte que le jeu d'échecs a été inventé par un vieux sage. Émerveillé, son roi lui demanda ce qu'il souhaitait en récompense de son génie.

Le vieux sage répondit juste un « peu » de riz. Plus précisément un grain de riz pour la première case du jeu, puis deux grains pour la deuxième case, et ainsi de suite, en doublant le nombre de grains à chaque changement de case, et ce jusqu'à la dernière, c'est-à-dire la 64^{ème}.

Le roi, quelque peu surpris de l'humilité du vieux sage, accepta volontiers sa demande.



Problématique : La masse d'un grain de riz étant estimée à 0,06 g, quelle masse totale de riz le roi dut-il donner ?

1. On note (u_n) la suite des nombres de grains de riz correspondant à chaque case de l'échiquier.
Donner les valeurs de u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

	0	1	2
SA			

2. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q .

	0	1	2
VA			

3. Exprimer u_n en fonction de n où n représente la $n^{\text{ième}}$ case du jeu d'échecs.

.....

	0	1	2
AR			

4. Calculer le nombre de grains de riz correspondant à la 64^e case.

.....

	0	1	2
RE			

Pour répondre à la problématique, on peut utiliser la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique :

La somme des termes jusqu'au rang k (les $k + 1$ premiers termes) d'une suite géométrique est : $S_k = u_0 \times \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$.

Si le premier terme de la suite est u_1 alors la somme des termes jusqu'au rang k (les k premiers termes) est : $S_k = u_1 \times \frac{q^k - 1}{q - 1}$.

5. Déterminer l'expression de S_{64} puis compléter la fonction suivante, la tester, et enfin, répondre à la problématique.

```
def somme(k) :
    return .....
```

.....

.....

.....

.....

.....

	0	1	2
AR			
VA			
CO			

6. On peut arriver au même résultat sans passer par la formule de la somme. Expliquer ce que fait le script suivant.

```
def somme(n):
    s=0
    for k in range (1,n+1):
        u = 1*2**(k-1)
        s = s + u
    return s
```

.....

.....

.....

.....

	0	1	2
AR			
CO			

7. Pour l'année 2023, la production mondiale de riz est estimée à 527 millions de tonnes. Comparer cette valeur à la demande du vieux sage, puis conclure sur la possibilité du roi de l'honorer.

.....

.....

.....

.....

	0	1	2
AR			
VA			
CO			