

Logarithme décimal

Capacités	Connaissances	Commentaires
<p>Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction logarithme décimal, sur un intervalle donné.</p> <p>Exploiter une droite tracée sur du papier semi-logarithmique.</p>	<p>Fonction logarithme décimal $x \mapsto \log x$</p> <p>Propriétés opératoires de la fonction logarithme décimal.</p>	<p>La fonction logarithme décimal est introduite à l'aide des TIC à partir de la fonction $x \mapsto 10^x$.</p> <p>La relation $\log 10^x = x$ est admise après des conjectures émises à l'aide des TIC.</p> <p>Les propriétés algébriques de cette fonction sont données et admises.</p> <p>Étudier des situations conduisant à l'utilisation du papier semi-logarithmique en liaison avec les sciences physiques ou le domaine professionnel.</p>
<p>Résoudre des équations du type $q^x = a$ et $\log x = a$ ou des inéquations du type $q^x \geq b$ (ou $q^x \leq b$) et $\log x \geq b$ (ou $\log x \leq b$).</p>	<p>Processus de résolution d'équations du type $q^x = a$ et $\log x = a$ et des inéquations du type $q^x \geq b$ (ou $q^x \leq b$) et $\log x \geq b$ (ou $\log x \leq b$).</p>	

GRILLE NATIONALE D'ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES ET EN SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

NOM et Prénom :	Diplôme préparé :	Séquence d'évaluation ¹ n°1
		Activité n°1 : mammoth

1. Liste des capacités, connaissances et attitudes évaluées

Capacités	Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction logarithme décimal sur un intervalle donné.
Connaissances	La fonction logarithme décimal
Attitudes	Le goût de chercher et de raisonner La rigueur et la précision

2. Évaluation²

Compétences ³	Capacités	Questions	Appréciation du niveau d'acquisition ⁴			
			points	0	1	2
S'approprier	Rechercher, extraire et organiser l'information.	1	1			
Analyser Raisonner	Émettre une conjecture, une hypothèse. Proposer une méthode de résolution, un protocole expérimental.	1	2			
Réaliser	Choisir une méthode de résolution, un protocole expérimental. Exécuter une méthode de résolution, expérimenter, simuler.	2	1			
		3	1			
		5	1			
		7	0,5			
Valider	Contrôler la vraisemblance d'une conjecture, d'une hypothèse. Critiquer un résultat, argumenter.	4	1			
		7	0,5			
Communiquer	Rendre compte d'une démarche, d'un résultat, à l'oral ou à l'écrit.	6	2			
			/ 10			

0 : non conforme aux attendus 1 : partiellement conforme aux attendus 2 : conforme aux attendus

¹ Chaque séquence propose la résolution de problèmes issus du domaine professionnel ou de la vie courante. En mathématiques, elle comporte un ou deux exercices ; la résolution de l'un d'eux nécessite la mise en œuvre de capacités expérimentales.

² Des appels permettent de s'assurer de la compréhension du problème et d'évaluer le degré de maîtrise de capacités expérimentales et la communication orale. Il y en a au maximum 2 en mathématiques et 3 en sciences physiques et chimiques.

En mathématiques : L'évaluation des capacités expérimentales – émettre une conjecture, expérimenter, simuler, contrôler la vraisemblance d'une conjecture – se fait à travers la réalisation de tâches nécessitant l'utilisation des TIC (logiciel avec ordinateur ou calculatrice). Si cette évaluation est réalisée en seconde, première ou terminale professionnelle, 3 points sur 10 y sont consacrés.

En sciences physiques et chimiques : L'évaluation porte nécessairement sur des capacités expérimentales. 3 points sur 10 sont consacrés aux questions faisant appel à la compétence « Communiquer ».

³ L'ordre de présentation ne correspond pas à un ordre de mobilisation des compétences. La compétence « Être autonome, Faire preuve d'initiative » est prise en compte au travers de l'ensemble des travaux réalisés. Les appels sont des moments privilégiés pour en apprécier le degré d'acquisition.

⁴ Le professeur peut utiliser toute forme d'annotation lui permettant d'évaluer l'élève (le candidat) par compétences.

GRILLE NATIONALE D'ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES ET EN SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

NOM et Prénom :	Diplôme préparé :	Séquence d'évaluation ⁵ n°1
		Activité n°1 : cycle de vie d'un produit

1. Liste des capacités, connaissances et attitudes évaluées

Capacités	Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction logarithme décimal sur un intervalle donné. Résoudre des équations du type $\log(ax) = b$ (avec $a > 0$).
Connaissances	La fonction logarithme décimal Processus de résolution d'équations du type $\log(ax) = b$ (avec $a > 0$).
Attitudes	Le goût de chercher et de raisonner La rigueur et la précision

2. Évaluation⁶

Compétences ⁷	Capacités	Questions	Appréciation du niveau d'acquisition ⁸			
			points	0	1	2
S'approprier	Rechercher, extraire et organiser l'information.	1	1			
Analyser Raisonner	Émettre une conjecture, une hypothèse. Proposer une méthode de résolution, un protocole expérimental.	2	2			
Réaliser	Choisir une méthode de résolution, un protocole expérimental. Exécuter une méthode de résolution, expérimenter, simuler.	3 4 6 8	1 1 1 0,5			
Valider	Contrôler la vraisemblance d'une conjecture, d'une hypothèse. Critiquer un résultat, argumenter.	5 8	1 0,5			
Communiquer	Rendre compte d'une démarche, d'un résultat, à l'oral ou à l'écrit.	7	2			
			/ 10			

0 : non conforme aux attendus 1 : partiellement conforme aux attendus 2 : conforme aux attendus

⁵ Chaque séquence propose la résolution de problèmes issus du domaine professionnel ou de la vie courante. En mathématiques, elle comporte un ou deux exercices ; la résolution de l'un d'eux nécessite la mise en œuvre de capacités expérimentales.

⁶ Des appels permettent de s'assurer de la compréhension du problème et d'évaluer le degré de maîtrise de capacités expérimentales et la communication orale. Il y en a au maximum 2 en mathématiques et 3 en sciences physiques et chimiques.

En mathématiques : L'évaluation des capacités expérimentales – émettre une conjecture, expérimenter, simuler, contrôler la vraisemblance d'une conjecture – se fait à travers la réalisation de tâches nécessitant l'utilisation des TIC (logiciel avec ordinateur ou calculatrice). Si cette évaluation est réalisée en seconde, première ou terminale professionnelle, 3 points sur 10 y sont consacrés.

En sciences physiques et chimiques : L'évaluation porte nécessairement sur des capacités expérimentales. 3 points sur 10 sont consacrés aux questions faisant appel à la compétence « Communiquer ».

⁷ L'ordre de présentation ne correspond pas à un ordre de mobilisation des compétences. La compétence « Être autonome, Faire preuve d'initiative » est prise en compte au travers de l'ensemble des travaux réalisés. Les appels sont des moments privilégiés pour en apprécier le degré d'acquisition.

⁸ Le professeur peut utiliser toute forme d'annotation lui permettant d'évaluer l'élève (le candidat) par compétences.

GRILLE NATIONALE D'ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES ET EN SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

NOM et Prénom :	Diplôme préparé :	Séquence d'évaluation ⁹ n°1
		Activité n°2 : chiffre d'affaires sur internet

1. Liste des capacités, connaissances et attitudes évaluées

Capacités	Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction logarithme décimal sur un intervalle donné. Résoudre une équation du type $10^x = a$
Connaissances	La fonction logarithme décimal
Attitudes	Le goût de chercher et de raisonner La rigueur et la précision

2. Évaluation¹⁰

Compétences ¹¹	Capacités	Questions	Appréciation du niveau d'acquisition ¹²			
			points	0	1	2
S'approprier	Rechercher, extraire et organiser l'information.	1	1			
Analyser Raisonner	Émettre une conjecture, une hypothèse. Proposer une méthode de résolution, un protocole expérimental.	1	2			
Réaliser	Choisir une méthode de résolution, un protocole expérimental.	2	1			
	Exécuter une méthode de résolution, expérimenter, simuler.	3 a) 3 b)	1 2			
Valider	Contrôler la vraisemblance d'une conjecture, d'une hypothèse. Critiquer un résultat, argumenter.	4	1			
Communiquer	Rendre compte d'une démarche, d'un résultat, à l'oral ou à l'écrit.	4	2			
			/ 10			

0 : non conforme aux attendus 1 : partiellement conforme aux attendus 2 : conforme aux attendus

⁹ Chaque séquence propose la résolution de problèmes issus du domaine professionnel ou de la vie courante. En mathématiques, elle comporte un ou deux exercices ; la résolution de l'un d'eux nécessite la mise en œuvre de capacités expérimentales.

¹⁰ Des appels permettent de s'assurer de la compréhension du problème et d'évaluer le degré de maîtrise de capacités expérimentales et la communication orale. Il y en a au maximum 2 en mathématiques et 3 en sciences physiques et chimiques.

En mathématiques : L'évaluation des capacités expérimentales – émettre une conjecture, expérimenter, simuler, contrôler la vraisemblance d'une conjecture – se fait à travers la réalisation de tâches nécessitant l'utilisation des TIC (logiciel avec ordinateur ou calculatrice). Si cette évaluation est réalisée en seconde, première ou terminale professionnelle, 3 points sur 10 y sont consacrés.

En sciences physiques et chimiques : L'évaluation porte nécessairement sur des capacités expérimentales. 3 points sur 10 sont consacrés aux questions faisant appel à la compétence « Communiquer ».

¹¹ L'ordre de présentation ne correspond pas à un ordre de mobilisation des compétences. La compétence « Être autonome, Faire preuve d'initiative » est prise en compte au travers de l'ensemble des travaux réalisés. Les appels sont des moments privilégiés pour en apprécier le degré d'acquisition.

¹² Le professeur peut utiliser toute forme d'annotation lui permettant d'évaluer l'élève (le candidat) par compétences.

I) Approche

Activité n°1 à résoudre au choix

Activité n°1 : Bébé mammouth, quand nous as-tu quittés ?

Lyuba, le bébé mammouth congelé retrouvé en Sibérie dans la péninsule de Yamal en mai 2007 est le spécimen le mieux conservé découvert à ce jour.

A quelle période Lyuba est-il mort ?

Pour cela, on utilise la datation par le carbone 14. Tant que l'organisme est vivant, la quantité de carbone 14 qu'il contient est constante. Par contre, à sa mort, cette quantité diminue.

On peut alors retrouver le temps écoulé depuis sa mort grâce une fonction f .

Soit le tableau de valeurs suivant :

<i>fraction de carbone 14 restant dans l'organisme</i>	0,1	0,15	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1
<i>temps écoulé, en années, depuis la mort du mammouth</i>	19 113	15 747,37	13 359,41	7 605,83	5 753,59	4 240,20	2960,64	1 852,24	0

Problématique : Comment peut-on estimer à quelle période Lyuba est mort sachant que la fraction de carbone 14 mesurée dans le fossile vaut 0,3 ?

1) Proposer une méthode de résolution pour répondre à la problématique posée.

(suite **Bébé mammoth, quand nous as-tu quittés ?**)

2) A l'aide de géogébra, représenter le nuage de points

3) Faire des essais pour déterminer l'expression algébrique de la fonction f la mieux adaptée pour ajuster ce nuage de points.

4) Recopier sur votre feuille l'expression algébrique de la fonction f trouvée.

5) Compléter le tableau de variation de la fonction f

X	
f	

6) La fraction de carbone 14 mesurée dans le fossile de Lyuba vaut 0,3.

A l'aide du graphique donner une estimation de son âge.

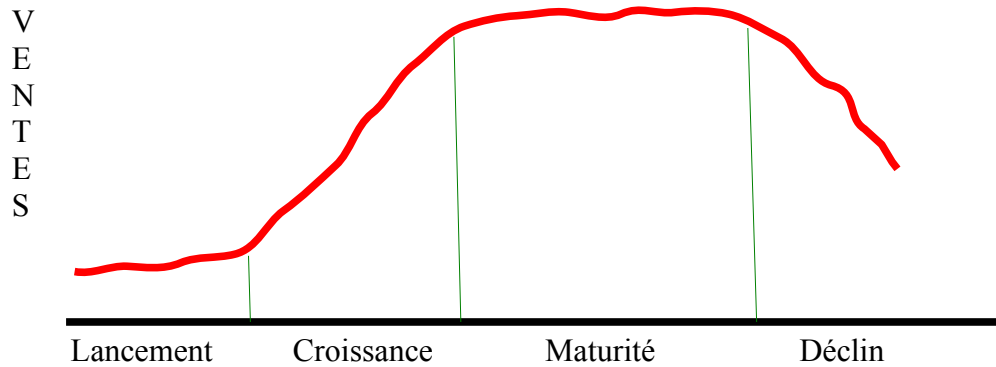
7) A l'aide de la question 4) donner une estimation de l'âge de sa mort.

Comparer le résultat obtenue avec la question 6)

Activité n° 1 : le cycle de vie d'un produit

Le cycle de vie d'un produit est créé à partir du cycle de vie biologique.

Exemple : une graine est plantée (lancement) ; elle commence à germer (croissances) ; des feuilles apparaissent et la plante s'enracine plus en devenant adulte (maturité) ; après une période plus ou moins longue, elle commence à faner et finit par mourir (déclin)



1) Relier chaque phase à sa définition

Lancement ●

Les concurrents sont attirés avec des offres similaires sur le marché. Le produit devient plus rentable. Les dépenses publicitaires sont élevées et l'on se concentre sur le développement de la marque. Les parts de marché tendent à se stabiliser et les bénéfices s'accroissent fortement.

Croissance ●

Le marché est ici en ralentissement. Des produits novateurs sont lancés ou les goûts de la clientèle se modifient. Les prix doivent être abaissés de telle sorte que beaucoup de produits doivent être retirés du marché.

Maturité ●

Les ventes augmentent plus lentement et finissent par se stabiliser. Les producteurs différencient leurs produits et les marques en sont le meilleur moyen. Une concurrence intensive est alors établie et c'est la guerre des prix. Le marché est saturé. Certains producteurs quittent le marché à cause de leur trop faible marge.

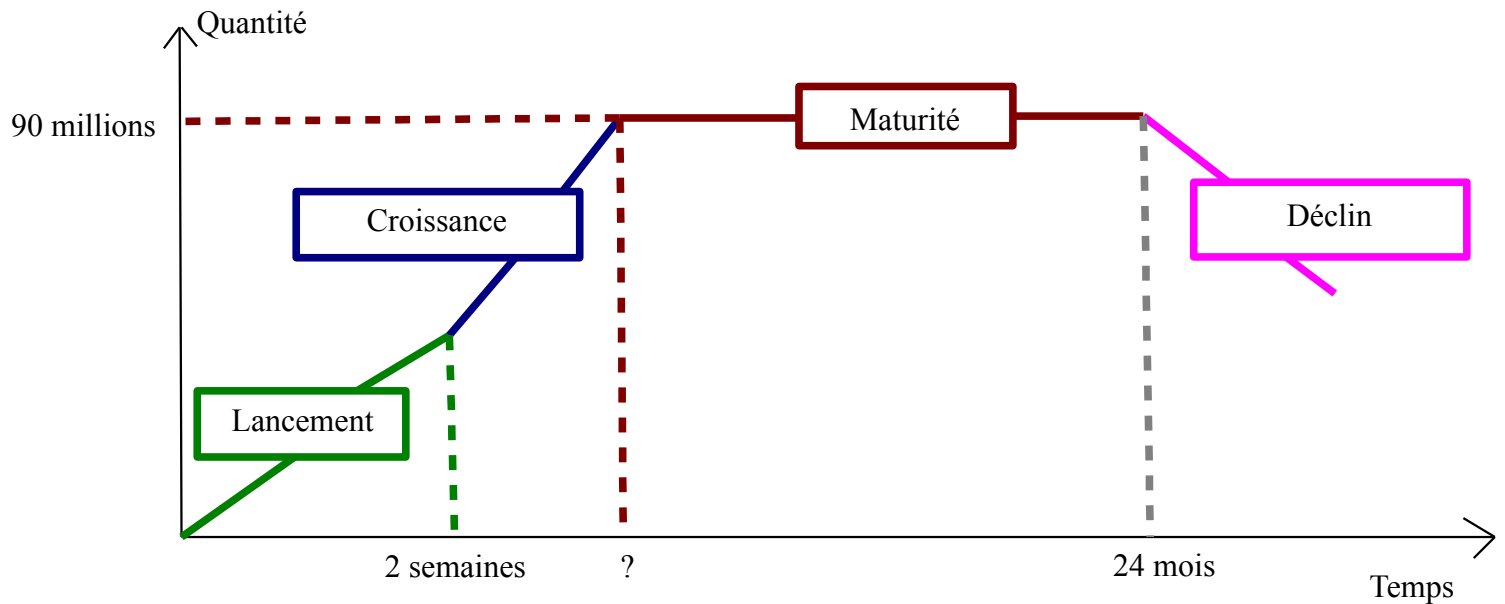
Déclin ●

Le produit est promu pour sensibiliser la clientèle. Si le produit ne connaît que peu ou pas de concurrence, une stratégie de prix d'entrée est utilisée. Un nombre limité de produits est disponible dans peu de chaînes de distribution.

Une entreprise lance sur le marché un nouveau processeur au 1^{er} janvier 2015.

Selon les analyses internes, les prévisions de ventes sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

Temps (en mois)	0,5	1	2	3	4	5
Nombre de processeurs vendus (en millions)	23	36	50	58	64	68



La phase de maturité est très importante car il faut utiliser les bénéfices pour préparer l'avenir : accompagner la fin du produit et préparer le lancement d'un nouveau produit.

Il est fondamental d'avoir une idée du début de cette phase.

Problématique : *Sur ce type de produit, la phase de maturité doit commencer quand la barre mensuelle des 90 millions de processeurs vendus est atteinte.*

Quand la phase de maturité doit-elle commencer ?

2) Proposer une méthode de résolution pour répondre à la problématique posée.

(suite ***le cycle de vie d'un produit***)

3) A l'aide de géogébra, représenter le nuage de points

4) Faire des essais pour déterminer l'expression algébrique de la fonction f la mieux adaptée pour ajuster ce nuage de points.

5) Recopier sur votre feuille l'expression algébrique de la fonction f trouvée.

6) Compléter le tableau de variation de la fonction f

X	
f	

7) La phase de maturité doit commencer quand la barre mensuelle des 90 millions de processeurs vendus est atteinte. Al'aide du graphique répondre à la problématique.

8) Montrer que l'équation $f(x) = 90$ peut s'écrire $\log x = 1,2$ et résoudre cette équation
Comparer le résultat obtenu avec la question 7)

remarque : $\log x = a$ équivaut à $x = 10^a$

Activité n°2 : chiffre d'affaires sur internet

La vente grand public sur internet (cosmétique, informatique, voyage...) affiche en France une croissance moyenne de 20% chaque année depuis 2010. En 2010, le chiffre d'affaires est de 2 milliards d'euros.

Problématique : *En quelle année le chiffre d'affaires prévisionnel dépassera-t-il 12 milliards d'euros ?*

1) Proposer une méthode de résolution pour répondre à la problématique posée.

2) Calculer les chiffres d'affaires des années 2011 et 2012.

3) a) Ces chiffres d'affaires successifs sont les premiers termes d'une suite géométrique (U_n). Indiquer sa raison et son premier terme U_1 .

b) Exprimer U_n en fonction de n

4) En quelle année le chiffre d'affaires prévisionnel dépassera-t-il 12 milliards d'euros ? Pour cela montrer qu'il faut résoudre l'équation $2 \times 1,2^{(n-1)} = 12$

(Vérifier le résultat obtenu et le résultat de votre méthode)

Bilan :

Les fonctions logarithmiques permettent de décrire certaines situations de la vie professionnelle et de résoudre des équations où l'inconnue se situe en exposant d'une puissance.

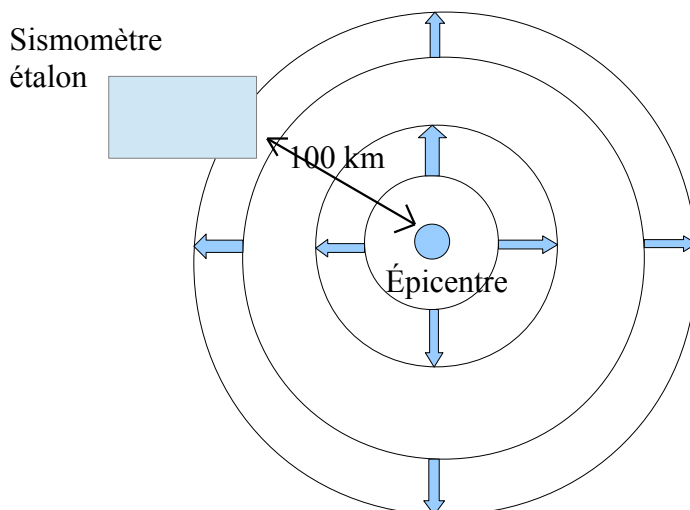
II) Fonction logarithme décimal

Activité n°3 : tremblement de terre

Lors d'un tremblement de terre (séisme), la puissance de celui-ci est décrite par sa magnitude M mesurée sur l'échelle de Richter.

On mesure la magnitude M d'un séisme à l'aide d'un sismomètre étalon situé à 100 km de l'épicentre. Le sismomètre est un appareil de grande sensibilité, muni d'une aiguille traçante mobile. Un séisme provoque une oscillation, d'amplitude x , de cette aiguille. L'amplitude x est mesurée en microns ($1\text{m} = 10^6 \mu\text{m}$)

À une amplitude x correspond une magnitude $M(x)$. $x \mapsto M(x)$



Proposer une possibilité de compléter le tableau ci-dessous, puis compléter le.

Amplitude x (μm)	1		10^2	10^4		10^6
Magnitude $M(x)$	0	1			5	6

* A l'aide de géogébra représenter l'amplitude x en fonction de la magnitude, recopier l'expression algébrique de la fonction, et compléter le tableau de variation

$M(x) =$

x	
M	

* Proposer une touche (fonction) de la calculatrice qui permet de calculer x connaissant $M(x)$

* Calculer l'amplitude x (en μm) pour un séisme de magnitude 3,2.

* Proposer une touche (fonction) de la calculatrice qui permet de calculer $M(x)$ connaissant x .

* Quelle serait la magnitude $M(x)$ qui correspond à une amplitude de $1345\mu\text{m}$?

Bilan :

La fonction logarithme décimal est définie pour tout x strictement positif par $f(x) = \log x$

$\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$

$\log 10^x = x$

plus généralement $\log a^n = n \times \log a$ (avec $a > 0$). Le logarithme transforme une puissance en multiplication.

$10^{(\log x)} = a$ équivaut à $x = 10^a$

Activité n°4 : propriétés opératoires

Compléter le tableau suivant :

a	b	$a \times b$	$\log a$	$\log b$	$\log(a \times b)$	$\log a + \log b$	$\log \frac{a}{b}$	$\log a - \log b$
2	3							
0,5	14							
7,9	4,2							
6,3	6,3							

Bilan :

* $\log(a \times b) = \log a + \log b$ (avec $a > 0$ et $b > 0$). Le logarithme transforme une multiplication en addition.

* $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ (avec $a > 0$ et $b > 0$). Le logarithme transforme une division en soustraction.

III] Historique et application

Au cours du XVI^e siècle, le développement du commerce et de la banque pose des problèmes de calcul numérique, ainsi que l'astronomie et la navigation (détermination d'une longitude, de la route la plus courte). Ces difficultés ont poussé à la découverte de techniques de calcul simplificatrices.

La première table de logarithmes est due à l'Écossais Neper ; il la publia en 1614, les logarithmes sont donnés avec 7 décimales. Ces logarithmes sont dit népériens et notés Ln.

Le Suisse Bürgi, en 1620, et l'Anglais Briggs, en 1624, publient chacun de leur côté une table de logarithmes dits décimaux (en relation avec les puissances de dix).

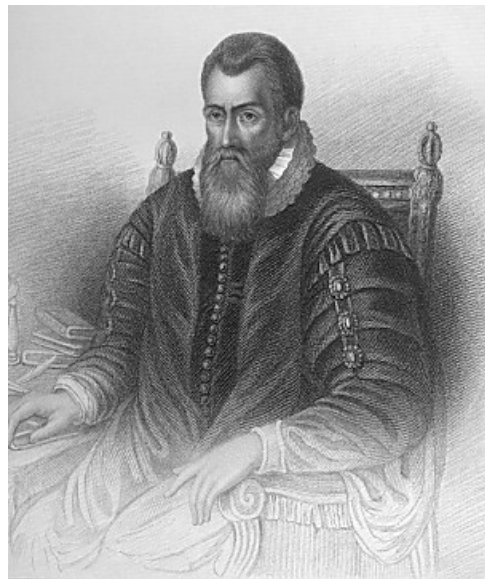
Un fait remarquable : inventée sous forme de tables pour répondre à des besoins pratiques de calcul, l'étude des fonctions logarithmes, même à l'ère des calculatrices, est d'une importance théorique, aussi bien en mathématiques que dans les autres sciences :

- * mathématiques : problème de gestion....
- * biologie : épidémiologie....
- * sciences physiques : pH d'une solution ; le niveau sonore (décibel).....

1) Quel est le phénomène qui a poussé à la découverte des tables de logarithmes ?

2) En vous aidant des propriétés des logarithmes décimaux, dites en quoi cette technique de calcul était simplificatrice (en 1624 les calculatrices électroniques n'existaient pas) ?

3) Quel est l'intérêt d'étudier ces fonctions numériques, aujourd'hui ?



John Napier, en France Neper



Jost Bürgi