MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques 2026

On rappelle ici le déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures).

• **Les candidates et candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques (« spé Maths ») traitent les exercices académiques 1 et 2.

• **Tous les autres candidates et candidats**, c'est-à-dire de la voie générale **N'**ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et tous et toutes de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD,...) traitent les exercices académiques 1 et 3.

Chaque candidate ou candidat traite ainsi deux exercices académiques. Selon sa catégorie, l'exercice 1 et l'exercice 2, ou bien l'exercice 1 et l'exercice 3. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats et candidates qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ou elles ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder entre 40 minutes et une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième exercice (exercice 2 ou 3 selon votre catégorie) quitte à revenir ensuite au premier.**

Lorsque le candidat ou la candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il ou elle l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il ou elle a été amené ou amenée à prendre, et poursuit sa composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre, petit matériel (ciseaux, colle) et calculatrices sont admis selon la réglementation en vigueur. L'échange de ces instruments, hors calculatrice, peut être autorisé entre candidats ou candidates sur accord explicite des surveillants, et dans le strict respect du silence.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.
*L'énoncé académique comporte **7** pages.*

Exercice 1 (tous les candidats et candidates)

Lignes brisées

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n points A_1 ; A_2 ; …; A_n disposés sur un cercle dans l’ordre trigonométrique (sens inverse des aiguilles d’une montre).

Définitions :

- On appelle ligne brisée ouverte **non orientée** une façon de relier les n points dans un ordre quelconque en passant par chaque point une et une seule fois **sans tenir compte de son sens de parcours**. Sur la *figure 1*, la ligne brisée non orientée représentée pour $n = 5$ se nomme indifféremment $A_5A_1A_4A_2A_3$ ou $A_3A_2\ A_4A_1\ A_5$.
- On appelle ligne brisée ouverte **orientée** une façon de relier les n points dans un ordre quelconque en passant par chaque point une et une seule fois **en tenant compte de son sens de parcours**. Sur la *figure 2*, la ligne brisée orientée représentée pour $n = 5$ se nomme $A_5A_1A_4A_2A_3$. Elle est donc différente de la ligne brisée orientée $A_3A_2\ A_4A_1\ A_5$
- Lorsqu’une ligne brisée (orientée ou non) forme une intersection avec elle-même, on dit qu’elle forme un point double. La ligne brisée sur la *figure 3* présente 2 points doubles.

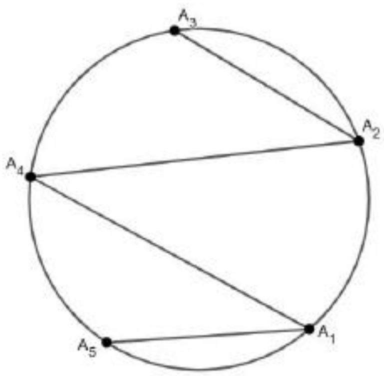


Fig 1 : une ligne brisée ouverte non orientée

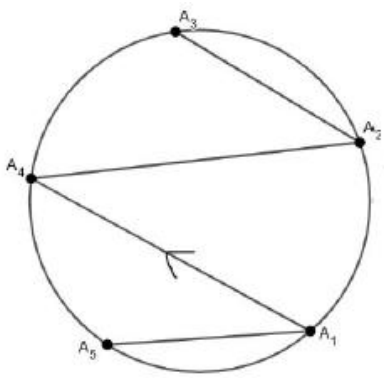


Fig 2 : une ligne brisée ouverte orientée

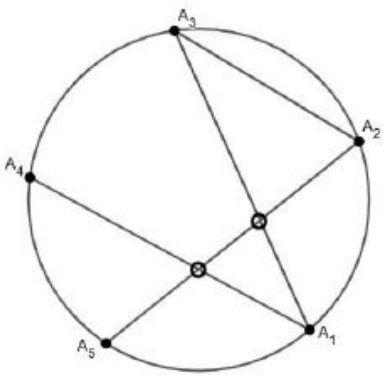


Fig 3 : une ligne brisée ouverte à deux points double.

PARTIE 1 : quelques exemples

1. Pour $n = 4$, représenter et nommer deux lignes brisées ouvertes non orientées sans point double.
2. Pour $n = 4$, représenter et nommer une ligne brisée ouverte orientée avec un seul point double.
3. Pour $n \geq 4$, est-il possible de construire une ligne brisée ouverte sans point double commençant par A_1A_3 … …?

4. Pour $n = 5$, construire une ligne brisée ouverte contenant 3 points doubles.

PARTIE 2 : lignes sans point double

Dans cette partie, on se propose de déterminer le nombre L_n de lignes brisées ouvertes **non orientées** différentes joignant les points A_1 ; A_2 ; …; A_n **sans former de points doubles.**

1. (a) Justifier que dans les cas $n = 2$ ou $n = 3$, une ligne brisée ne peut pas contenir de point double.

(b) En déduire alors L_2 et L_3.

(c) Déterminer L_4 (on pourra s'aider de la question 3 de la partie 1).

2. On note M_n le nombre de lignes brisées **orientées et sans point double et dont le point de départ est** A_1.

(a) Déterminer M_2 ; M_3 et M_4.

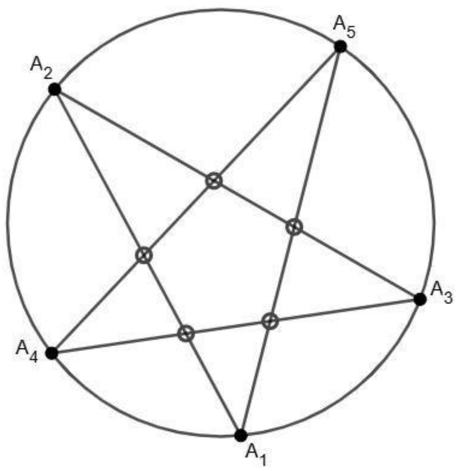
(b) Etablir une relation générale entre L_n et M_n.

(c) Etablir une relation générale entre M_n et M_{n-1}.

(d) En déduire l'expression générale de L_n en fonction de n.

PARTIE 3 : nombre de segments

Dans cette partie, les points sont disposés sur le cercle dans un ordre quelconque et on considère la **ligne brisée fermée** joignant les points $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ dans cet ordre-là. On se propose de déterminer le nombre maximum D_n de points doubles réalisables avec n points.
On donne ci-contre une figure pour $n = 5$. Les points doubles sont représentés par des ronds blancs.



1. Pour i tel que $0 \leq i \leq n-1$ fixé, on considère le segment $A_i A_{i+1}$. Déterminer le nombre maximal de segments de la ligne brisée intersectés par le segment $A_i A_{i+1}$ (les points A_i et A_{i+1} ne sont pas considérés comme des points d'intersection).

2. En déduire l'inégalité $D_n \leq \frac{n(n-3)}{2}$.

3. A-t-on nécessairement $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$?

Exercice 2 (candidats et candidates de la voie générale suivant la « spé maths »)

La constante de Kepler-Bouwkamp.

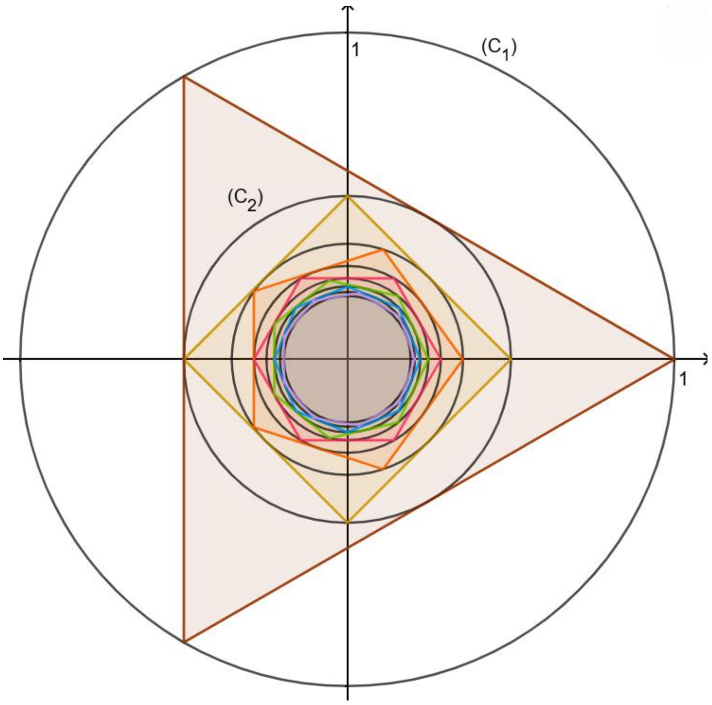
On considère un cercle de rayon $r_1 = 1$, nommé $\mathcal{C}_1$. On y inscrit un triangle équilatéral.

A l'intérieur de ce triangle équilatéral, on y inscrit un cercle $\mathcal{C}_2$ (ce cercle est tangent aux trois côtés du triangle) de rayon r_2.

A l'intérieur de $\mathcal{C}_2$, on y inscrit un carré. Dans ce carré, on y inscrit un cercle $\mathcal{C}_3$ de rayon r_3.

Plus généralement, à chaque étape n qui va suivre, on inscrit dans le cercle $\mathcal{C}_n$ qui vient d'être tracé un polygone régulier qui a un côté de plus que le polygone précédemment tracé, puis on inscrit dans ce polygone un cercle $\mathcal{C}_{n+1}$ de rayon r_{n+1}.

La figure obtenue dans les premières étapes de cette construction est représentée ci-dessous :



La figure fait apparaître que le rayon r_n semble se stabiliser, quand n devient très grand, vers une valeur appelée **la constante de Kepler-Bouwkamp**, qui est l'objet de ce problème.

On appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite générale définie pour $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{r_{n+1}}{r_n}$.

Nous allons étudier les valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, en calculer précisément les premiers termes jusqu'à $n = 3$, puis nous déterminerons l'expression de la constante de Kepler-Bouwkamp afin d'en extraire une valeur approchée.

1. Montrer que $u_1 = \frac{1}{2}$.

2. Calculer la valeur de u_2.

Dans les questions **3.** *et* **4.** *qui suivent, on va chercher une expression explicite de u_n. Il est fortement conseillé, pour une meilleure compréhension du problème, d'exprimer tous les angles utilisés en radians, avec des valeurs positives.*

3. On considère un cercle de rayon a, dans lequel on inscrit un polygone régulier à p côtés (avec $p \geq 3$), avant d'inscrire un autre cercle dans ce polygone.

Pour cette question, on considère que $p = 8$.

(a) Dessiner une figure représentant la situation, avec une valeur de a choisie librement.
(b) Calculer la valeur du rayon du cercle inscrit en fonction de a et du cosinus d'un angle à déterminer

4. Pour cette question, on généralise pour toute valeur de p.
(a) Exprimer la valeur du rayon du cercle inscrit dans le polygone en fonction de p et a.
(b) En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n.
(c) Vérifier que l'expression trouvée est compatible avec les valeurs trouvées aux questions **1.** et **2**.

5. On cherche dans cette question à trouver une valeur exacte de u_3.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que ${v_n}^2 = 1 - {u_n}^2$, avec $v_n \geq 0$.

(a) Déterminer une expression de v_n en fonction de n.
(b) On admet la relation suivante : $\sin(5x) = 16\sin^5(x) - 20sin^3(x) + 5\sin(x)$.
Montrer que v_3 est solution de l'équation : $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0 \quad (E)$.
(c) Résoudre (E) et en déduire une expression exacte de la valeur v_3.
(d) En déduire que $u_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

6. (a) Écrire une expression de r_n en fonction de n.
(b) Écrire en langage Python une fonction nommée $rayon(n)$ permettant de calculer la valeur de r_n en fonction d'un n donné (le programme pourra commencer par la ligne **from** math **import** * pour utiliser toutes les fonctions mathématiques).
(c) Déterminer une valeur approchée au millième près de la constante de Kepler-Bouwkamp (en utilisant, ou non, l'algorithme de la question **6**.(b)).

<u>*Pour votre culture*</u> *: à ce jour, il n'est pas encore démontré si la constante de Kepler-Bouwkamp est un nombre rationnel ou pas.*

Exercice 3 (candidat/es de la voie générale NE suivant PAS la « spé maths » et TOUS/TES les candidat/es de la voie technologique)

Moyennes et inégalités

PARTIE 1 : quelques exemples concrets

1. Lors d'un premier contrôle, un élève a obtenu la note de 9 sur 20. Un deuxième contrôle est prévu, avec le même coefficient que le premier. Quelle est la valeur maximale de la moyenne que cet élève peut obtenir sur ces deux notes ?

2. On dispose de deux plaques métalliques carrées, de même épaisseur $e = 10\text{cm}$, mais de côtés différents $R_1 = 30\text{cm}$ et $R_2 = 50\text{cm}$. Sans perdre de métal, on décide de fondre ces deux plaques pour en fabriquer deux autres de même épaisseur e et de même côté.
Calculer la valeur exacte du côté de ces deux nouvelles plaques.

3. Un cycliste effectue la montée d'un col à la vitesse constante $v_1 = 20\text{km/h}$. Une fois arrivé au col, il redescend par la même route à la vitesse constante $v_2 = 60\text{km/h}$.
Calculer sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet.

4. D'après l'INSEE, les prix à la consommation ont connu une inflation annuelle de $+5{,}0\%$ en 2023 et de $+2{,}0\%$ en 2024. Quel est le taux d'évolution annuel moyen de l'inflation lors de ces deux années ?

PARTIE 2 : un peu d'ordre

Dans cette partie, a et b désignent deux nombres réels strictement positifs. On appelle :

- Moyenne harmonique de a et b le nombre h tel que : $\frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
- Moyenne géométrique de a et b le nombre positif g tel que : $g \times g = a \times b$
- Moyenne arithmétique de a et b le nombre m tel que : $m + m = a + b$
- Moyenne quadratique de a et b le nombre positif q tel que : $q^2 + q^2 = a^2 + b^2$

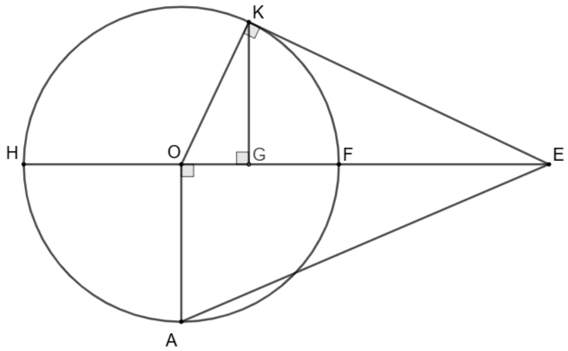
1. Exprimer ces quatre moyennes en fonctions de a et b.

2. Démontrer que $2ab \leqslant a^2 + b^2$, avec égalité si et seulement si $a = b$.

3.Démontrer que : $h \leqslant g \leqslant m \leqslant q$.

4. Associer chacun des problèmes de la partie 1 à l'une de ces moyennes.

5. Sur la figure ci-dessous, les points E, F, G, O et H sont alignés. On pose $EH = a$ et $EF = b$. Associer, par le calcul, chacune des longueurs EA, EG, EK et EO à l'une de ces moyennes.



PARTIE 3 : quelques inégalités célèbres

1. Vous avez obtenu les notes 18, 12 et 15 dans trois matières différentes, auxquelles vous devez affecter les coefficients 2, 4 et 7 mais vous avez le choix de l'ordre des coefficients. Quel ordre choisissez-vous ?

2. ***Inégalité de réordonnement***

Soit n un entier naturel non nul, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ des réels.

(b) On considère c_1, c_2,…, c_n une permutation des (b_i), c'est-à-dire les mêmes nombres que les b_i mais dans un ordre qui peut être différent.
Démontrez que :
$a_1b_n + a_2b_{n-1} \cdots + a_nb_1 \leqslant a_1c_1 + a_2c_2 \cdots + a_nc_n \leqslant a_1b_1 + a_2b_2 \cdots + a_nb_n$.

(b) *Interprétation géométrique*
Un rectangle de dimensions $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \times (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$ se partage en n^2 rectangles. On peut choisir un rectangle par ligne et par colonne. Comment choisit-on pour obtenir l'aire la plus grande ?

3. Déduire des questions précédentes :

(a) *Inégalité de Nesbitt*. Soit a, b et c trois nombres réels strictement positifs.
Montrer que : $\frac{3}{2} \leqslant \frac{a}{(b+c)} + \frac{b}{(a+c)} + \frac{c}{(a+b)}$.

(b) Inégalité de *Tchebychev*. On suppose que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$.
Démontrer que : $\frac{(a_1+\cdots+a_n)}{n} \times \frac{(b_1+\cdots+b_n)}{n} \leqslant \frac{(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)}{n}$.

(c) Donner l'interprétation de cette dernière inégalité en termes de moyennes.