

MANIPULER EN MATHEMATIQUES

Gracom 2018/2020

RESUME

Le rapport Villani-Torossian, paru en février 2018 promeut la manipulation dans l'apprentissage des concepts mathématiques. Notre travail a consisté, d'une part, à dégager des conditions pour créer des activités de manipulation favorables aux apprentissages, et d'autre part, à proposer des activités de manipulation-expérimentation et préciser leur place dans les différentes phases d'apprentissage d'une notion.

Introduction

Manipuler : une activité mathématique ?

Par essence, les objets mathématiques sont des objets abstraits. Est-ce pour autant qu'il faut exclure les mathématiques des sciences expérimentales ? Dès le début des apprentissages des mathématiques à l'école, les enfants sont amenés à manipuler des objets pour représenter les nombres, les formes, les grandeurs... Ces activités utilisent des connaissances mathématiques, et peuvent favoriser non seulement l'observation, mais aussi l'émergence de questionnement, ou simplement des possibilités de vérification.

Manipuler ? Expérimenter ?

Thierry Dias : « Manipuler consiste à agir sur un matériel **sans intention précise ni projet bien déterminé**. L'expérimentation est en revanche un processus scientifique qui est **guidé par une volonté de tester ou de vérifier par exemple**. »

Une véritable expérimentation suppose raisonnement et anticipation, émission d'hypothèses, élaboration de stratégies, ce qui est bien différent d'une manipulation imposée et pilotée par l'enseignant.

Thierry Dias (Manipuler et expérimenter en mathématiques) détaille ainsi 4 phases pour « rendre opérationnelle la mise en place d'expériences mathématiques » :

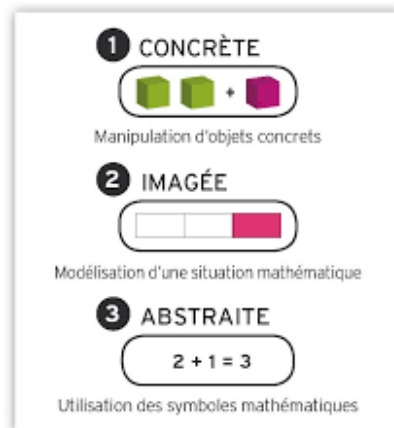
Phase 1 : Privilégier l'action des élèves	Les situations d'apprentissage doivent si possible commencer par une phase dans laquelle ce sont les actions (manipulations, constructions, observations) des élèves qui sont sollicitées. Ils doivent pouvoir faire des manipulations et des expériences multiples notamment grâce à l'utilisation de matériel et d'instruments adaptés. Lors de cette phase, les élèves doivent également avoir le temps d'observer et de réfléchir afin de coordonner leurs actions avec leur raisonnement.
Phase 2 : laisser parler les élèves	Vient ensuite le temps de la mise en mots, pendant laquelle les élèves décrivent ou commentent les actions conduites dans la phase précédente. Dans cette étape de formulation, toutes les propositions doivent être acceptées. L'enseignant assure les conditions nécessaires à des échanges langagiers sans intervenir si ce n'est pour des relances ou d'éventuelles demandes de reformulation. Il veille aussi à distribuer la parole à toutes et à tous afin de ne pas priver qui que ce soit d'expression, quelle que soit la validité de son contenu.
Phase 3 : mettre en commun et débatte	Ce n'est que lors de cette phase de validation que le tri sera fait parmi les idées, démarches, propositions exprimées. C'est le temps du débat, de l'argumentation et de la validation scientifique des propositions. Le rôle de l'enseignant est celui de l'animateur de débat : il doit recentrer les propos chaque fois que nécessaire et ainsi cultiver l'idée de la nécessaire validité en propos en mathématiques.
Phase 4 : institutionnaliser les savoirs	Pour terminer cette séquence d'enseignement/apprentissage, il est nécessaire d'aider les élèves à stabiliser leurs connaissances lors de moments d'institutionnalisation. Le savoir est mis en mot, généralement par l'enseignant, afin de lui donner un caractère officiel. Il est en effet important que chaque élève puisse garder une trace objective et valide de ses activités de recherche qui sont souvent foisonnantes. En montrant ainsi les contenus de savoir, on permet aussi aux élèves de se situer dans une progression des apprentissages.

Rapport Villani-Torossian

Le rapport Villani – Torossian, tout en promouvant les activités de manipulation (de la maternelle au lycée) comme étape incontournable de l'apprentissage des concepts mathématiques, les replace dans un enchaînement de plusieurs phases toutes indispensables et complémentaires.

Page 20, il explique que l'enseignement des mathématiques doit se faire selon une progression « concrète → imagée → abstraite ». Chaque notion est abordée d'abord sous un angle concret (situation de la vie courante, cubes, jetons...) permettant aux élèves de manipuler, et de toucher ;

- La situation concrète est ensuite représentée de manière schématique ;
- La représentation abstraite est enfin introduite (chiffres et symboles).



Ce rapport fait aussi référence à des séances d'apprentissages articulées de la manière suivante (p 26) :

- les phases de recherche autonome mais encadrée ;
- les phases de cours très commentées, où l'on interroge la rédaction des énoncés
- mathématiques, où l'on présente certaines preuves (cf. §3.1.2 ci-dessous) ;
- la présentation d'exemples abondants, matière à débats, pour s'assurer de la compréhension de tous, en étant très à l'écoute des élèves ;
- la mise en application par les élèves, en autonomie, sur des cas très simples d'abord, puis de plus en plus substantiels ;
- les rituels, indispensables pour faire fonctionner et stabiliser les connaissances, les méthodes et les stratégies ;
- l'étude de problèmes internes aux mathématiques et pas seulement de situations appliquées.

Plus loin, sur la place du cours :

« La trace écrite ne peut arriver qu'après des étapes importantes comme celles où les élèves manipulent, s'approprient les notions avec leur cheminement, leurs mots. Ce passage de la manipulation, de la découverte, vers l'abstraction doit vraiment prendre appui sur une phase intermédiaire, souvent oubliée ou trop implicite : la phase de verbalisation, de « mise en mots » par

les élèves. Et ceci de la maternelle au lycée ; ces trois phases d'apprentissage peuvent se résumer dans le triptyque : manipuler, verbaliser, abstraire.

Les sciences cognitives, nous rappellent que l'attention des élèves joue un rôle crucial pour un apprentissage efficace et que par ailleurs leur capacité de concentration est réduite en temps (35 minutes sur une phase de cours de 55 minutes). Il convient donc que la phase écrite soit terminée à ce moment, pour laisser place à un autre temps. Reporter la trace écrite à une autre séance est tout simplement inefficace. »

Programmes officiels:

Les ajustements de programme publiés en juillet 2018 reprennent cette idée :

« Pour certains élèves, l'accès à l'abstraction ne peut se faire que s'il est précédé par deux phases intermédiaires : celle de la **manipulation**, puis celle de la **verbalisation** (mise en mots) ou de la **représentation** (mise en images). De nombreux objets réels (carreaux de mosaïque, morceaux de ficelle, balances et autres instruments de mesure, solides, etc.) permettent d'approcher certaines notions abstraites (numération, fractions, équations, aires et volumes, etc.) de manière tactile, sensorielle. Il ne faut pas se priver d'y recourir lorsque cela s'avère nécessaire, même au collège.

La mise en mots (par oral ou par écrit) dans le langage courant, véritable moyen de développer sa pensée, aide à la compréhension, à la mémorisation et à la routinisation de connaissances et de procédures. En parallèle et en complément, la constitution d'un répertoire d'images mentales est un autre atout pour la mémorisation.

Une trace de cours claire, explicite et structurée aide l'élève dans l'apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux étapes importantes de recherche, de découverte, d'appropriation individuelle ou collective, de présentation commentée, de débats, de mise au point, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les procédures et les stratégies étudiées. Ne se limitant pas à un catalogue de recettes, mais explicitant les objectifs et les liens, elle constitue pour l'élève une véritable référence vers laquelle il pourra se tourner autant que de besoin et tout au long du cycle. Sa consultation régulière (notamment au moment de la recherche d'exercices et de problèmes, sous la conduite du professeur ou en autonomie) favorise à la fois la mise en mémoire et le développement de compétences. Le professeur doit avoir le souci de la bonne qualité (mathématique, rédactionnelle) des traces figurant au tableau ou dans les cahiers d'élèves. En particulier, il est essentiel de distinguer le statut des énoncés (définition, propriété – admise ou démontrée –, conjecture, démonstration, théorème) et de respecter les enchaînements logiques. Pour être accessible au plus grand nombre, y compris les familles et les accompagnateurs du périscolaire, la mise en mots de certains énoncés mathématiques gagne à être reformulée dans le langage courant. »

Manipuler : points de vigilance

Manipuler des objets n'est pas synonyme d'être acteur de ses apprentissages. Si les enfants se contentent de manipuler, ils ne font pas de mathématiques, puisque les mathématiques sont, par nature, abstraites. Le danger est que tout ou partie des élèves se cantonnent à la réalisation d'une tâche sans se rendre compte qu'ils n'accèdent pas à la connaissance visée.

Un élève actif n'est pas simplement un élève actif physiquement, ce qu'on recherche chez lui est bien une activité cognitive, sélective, manipulant des objets physiques mais aussi des concepts (Voir les travaux d'André Tricot, Mythe et réalités en innovation pédagogique).

Cela force l'enseignant, d'une part, à se poser des questions précises sur la manière dont il conçoit les activités de manipulation, et d'autre part, à se demander comment elles vont être traitées par les différents élèves qui composent son groupe classe.

Certains élèves, par exemple, peuvent avoir besoin d'un temps de manipulation plus grand que les autres. Ils peuvent aussi avoir besoin d'avoir accès à des représentations physiques d'objets mathématiques pour entrer dans un problème. Il pourra être intéressant pour ces enfants de laisser le matériel de manipulation à disposition pour qu'il puisse effectuer des vérifications de son travail, ou de le réutiliser lors d'activités de remédiation différenciées. Pour autant, il ne faut pas que l'organisation du travail les laisse se satisfaire de tâches de manipulation, au risque d'accroître les inégalités scolaires. On peut présager qu'un risque à plus long terme serait de créer un malentendu sur les attendus de l'école.

Conclusion

Lorsqu'un enseignant élabore des activités de manipulation pour ses élèves, et pour que cette manipulation permette d'accéder à l'abstraction, il serait intéressant :

- de s'assurer qu'elle permette de faire émerger un questionnement.
- de créer une contrainte, pour que la manipulation à elle seule ne permette de résoudre le problème de manière optimale, et ainsi nécessiter de trouver "un moyen de savoir alors qu'on ne peut pas voir".
- d'envisager la poursuite du travail. La phase de manipulation doit être intégrée à une série de phases qui vont permettre l'acquisition de la connaissance visée. Parmi ces étapes, il en est une essentielle, celle de la mise en mots par l'élève, qui permet à l'enseignant de jauger le degré d'abstraction déjà mobilisé. Charge à lui, après avoir laissé s'exprimer des formulations, mêmes imparfaites d'étayer cette mise en mots.

Notre travail a consisté à proposer des activités de manipulation-expérimentation et préciser leur place dans les différentes phases d'apprentissage d'une notion.

Dans la suite de ce document, nous vous proposons un catalogue de situations dans lesquelles nous avons été amenées à faire manipuler nos élèves de collège, et le matériel que nous utilisons. Nous avons choisi de présenter plus en détail 2 thèmes d'apprentissage pour lesquels nous avons travaillé les modalités de mise en œuvre des activités de manipulation pour qu'elles atteignent le but recherché : l'abstraction. Nous les avons intégrées dans des séquences d'apprentissage, et avons tenté de préciser, notamment, les phases de verbalisation. Nous avons trouvé très inspirants les travaux d'une équipe canadienne que vous pourrez retrouver dans la bibliographie.

Bibliographie :

[Rapport Villani - Torossian](#)

[Luis Radford, Serge Demers, Isaias Miranda - Processus d'abstraction en mathématiques – Repères pratique et conceptuels.](#)

[Thierry Dias - place de la verbalisation dans l'apprentissage des concepts mathématiques](#)

Thierry Dias – Manipuler et expérimenter en mathématiques.

André Tricot : L'innovation pédagogique, mythes et réalités.

Bitt-Mri BARTH – L'apprentissage de l'abstraction

[Travail de l'académie de Limoge autour du calcul littéral en 4ème](#)