MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques

Métropole

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les énoncés et les copies sont également ramassées.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures).

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques (« spé Maths »), et uniquement ceux-là, doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

- **Tous les autres candidats**, c'est-à-dire ceux de la voie générale **N'**ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD,...) doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Chaque candidat traite ainsi deux exercices académiques. Selon sa catégorie, l'exercice 1 et l'exercice 2, ou bien l'exercice 1 et l'exercice 3. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder entre 40 minutes et une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième exercice (exercice 2 ou 3 selon votre catégorie) quitte à revenir ensuite au premier. Les candidats peuvent composer par équipe et dans ce cas, une seule copie par équipe sera restituée à l'issue de l'épreuve académique. Sur cette copie doit impérativement figurer les noms et prénoms des candidats composant le groupe.**

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

L'énoncé académique comporte pages.

Exercice 1 (tous les candidats)

Introduction à la suite de la courbe du Dragon

Dans ce problème, on se propose d'étudier les principes de la suite de pliage de papier régulière, connue sous le nom de la « suite de la courbe du dragon ».

On considère une feuille de papier qu'on plie en deux sur la droite. En la dépliant, on observe que cette feuille, vue de profil, dessine une ligne polygonale avec un pli vers la droite (figure 1).

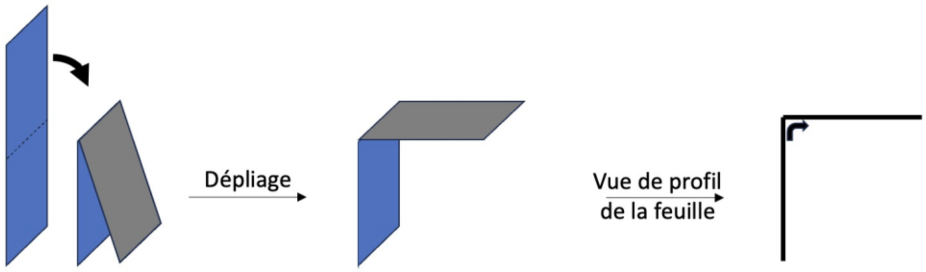

Figure 1

En repliant, à nouveau sur la droite, la feuille déjà pliée une fois, on obtient une feuille pliée en 4, que l'on déplie à nouveau. La ligne polygonale obtenue après dépliage présente alors deux plis sur la droite, puis un pli sur la gauche (figure 2).

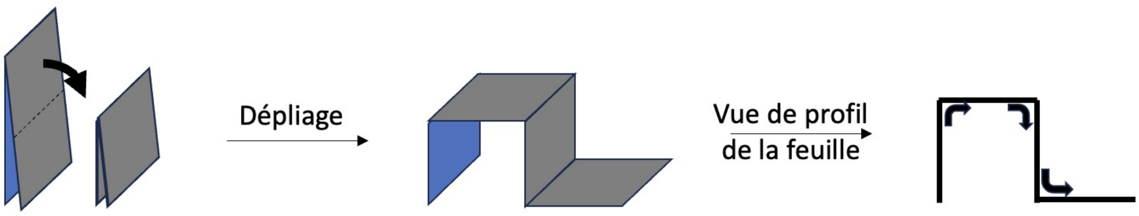

Figure 2

En répétant l'opération, toujours en pliant sur la droite, on obtient à chaque étape de pliage et dépliage une suite de plis, à gauche et à droite, de plus en plus longue. La ligne obtenue finit par ressembler à une forme de « dragon » (figure 3).

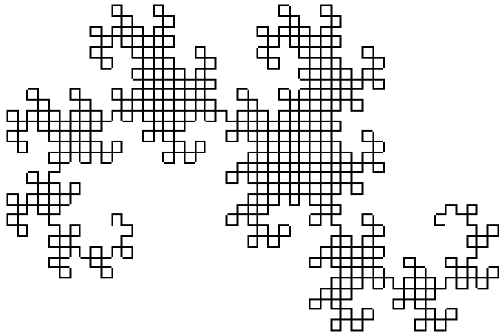

Figure 3

On appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des listes de nombres formées uniquement avec des 1 et des 0 correspondant aux directions successives des plis prises la ligne polygonale, en considérant qu'un pli sur la droite est codé par 1 et qu'un pli sur la gauche est codé par 0. u_n est la liste formée après la n-ième étape de pliage/dépliage.

On a ainsi : $u_1 = \{1\}$ et $u_2 = \{1{,}1{,}0\}$.

1. En vous appuyant sur une feuille de papier pliée et dépliée, dessiner le profil de la ligne polygonale après la 3ème étape.
2. Donner la liste de u_3 et celle de u_4.
3. Donner l'expression, en fonction de n, du nombre de plis obtenus après la n-ième étape.
4. Expliquer, à l'aide d'un argument géométrique, pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (entier strictement positif), la suite ordonnée des nombres dans la liste de u_n est exactement la même que la suite ordonnée des premiers nombres dans la liste de u_{n+1}.
5. On appelle $p_n(k)$ la valeur du k-ième chiffre ordonné dans la liste de u_n.

   A l'aide d'arguments de type géométrique, montrer que :

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n(2^{n-1}) = 1$.

   b. pour tout l entier tel que $1 \leq l \leq 2^{n-1} - 1$: $p_n(2^{n-1} + l) = 1 - p_n(2^{n-1} - l)$
6. On appelle p la liste infinie formée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand n tend vers l'infini, et $p(k)$ la valeur de son k-ième chiffre ordonné.
   Calculer, en justifiant, la valeur de $p(2025)$.
7. **a.** Montrer que pour tout k entier positif non nul: $p(2k) = p(k)$.

   b. Pour tout k entier positif non nul, on note h le plus grand diviseur impair de k. Montrer que $p(k) = p(h)$.
8. Montrer que pour tout entier impair positif h, le calcul de $p(h)$ peut toujours se ramener, par un procédé répété, au calcul de $p(1)$.
9. En vous appuyant sur les résultats des questions 7) et 8), écrire en langage Python une fonction p qui permet de calculer $p(k)$.

Remarque : pour cette question, tout début d'écriture de programme, même non abouti, sera pris en compte.

Source *: « Mirroring and interleaving in the paperfolding sequence », Bruce Bates, Martin Bunder, Keith Tognetti, Appl. Anal. Discrete Math. 4 (2010), 96–118.*

Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant la « spé maths »)

Le Casino de Penrose

L'exercice 2 est composé de deux parties indépendantes.

Partie A

On joue avec quatre dés bien équilibrés à 6 faces dont les chiffres sur leurs faces sont inhabituels :

- Dé A : 3 3 3 3 3 3
- Dé B : 4 4 4 4 0 0
- Dé C : 5 5 5 1 1 1
- Dé D : 6 6 2 2 2 2

Quand on lance un dé, on note le résultat de sa face supérieure.

1. Un joueur choisit un dé, le lance 10 fois et additionne les résultats. Le joueur gagnant est celui qui obtient le plus grand total. Quel dé choisissez-vous ? Justifier votre choix.
2. À présent, on compare les dés deux à deux lors d'un unique lancer des 2 dés. Le dé gagnant est celui dont le résultat est le plus grand.
   a. Combien de matchs de dés différents peut-on faire ?
   b. Montrer que le dé B est « meilleur en probabilité » que le dé A, en vérifiant que la probabilité de gagner avec B contre A est égale à $\frac{2}{3}$.
   c. Comparer de même les dés B et C, puis les dés C et D.
   d. Vous jouez contre une personne qui choisit son dé en premier et vous choisissez votre dé parmi les trois restants. Quel dé choisissez-vous ?
   e. En supposant que des dés différents soient attribués de façon aléatoire à 2 joueurs, quel dé assure la plus grande probabilité de victoire ?
3. Proposer 3 dés tétraédriques (à 4 faces bien équilibrées dont la face inférieure serait le résultat lors d'un lancer), notés A, B et C, dont les faces sont numérotées avec des chiffres entiers compris entre 1 et 4 et tels que, avec la même probabilité, A l'emporte sur B, B l'emporte sur C, et C l'emporte sur A.

Partie B

Une pièce de monnaie bien équilibrée est lancée et engendre une suite de pile P et de face F.
Pour participer, un joueur choisit un motif de longueur 3, par exemple : PPF,FPF…, mais son choix initial est définitif pour toute la durée du jeu. Le casino propose le système de paris suivant :

- Avant chaque lancer, le joueur doit miser 1€ sur l'apparition de son motif lors des 3 prochains lancers,
- Le casino double la mise en donnant 2€ pour 1€ misé à chaque lancer correspondant du motif choisi, et en gardant la mise dès qu'un résultat ne correspond pas.
- Les joueurs doivent automatiquement remiser leurs gains provisoires à chaque lancer, en plus de la nouvelle mise de 1€ sur les trois prochains lancers.

Le jeu s'arrête quand le motif d'un joueur apparaît entièrement.

1. Combien de motifs différents de longueurs 3 est-il possible de choisir au début ?
2. Un exemple : le joueur choisit le motif PPP. La pièce génère la suite $PPFPPP$. Vérifier que le

joueur a un bilan de +8€.

3. Justifier qu'à chaque tour le jeu est équitable.
4. Le jeu s'arrête en 3 tours. Démontrer que si plusieurs joueurs choisissent des motifs différents, tous les motifs sont équiprobables.

Cas général : on suppose désormais que le jeu se termine en n tours, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

5. Justifier que si le joueur 1 choisit PPP, alors en choisissant FPP le joueur 2 gagne avant avec une probabilité de $\frac{7}{8}$.
6. On suppose dans cette question que le joueur 1 a choisi FPP. Le joueur 2 cherche alors à comparer les motifs FPP et FFP.

Pour ce faire, le joueur 2 propose le stratagème suivant au joueur 1 :

- À chaque tour, le joueur 1 donne 1€ au joueur 2,
- Le joueur 2 s'engage alors à miser pour le joueur 1 sur FPPet à lui reverser les gains éventuels à la fin du jeu,
- De son côté, à chaque tour, le joueur 2 utilise les 1€ en misant sur FFP lors des trois prochains lancers.

   a. Quel serait le bilan financier du joueur 2 si le jeu se terminait sur FFP? Même question si le jeu se termine sur FPP.

   b. En déduire que la probabilité pour FFP d'apparaître avant FPP est de $\frac{2}{3}$.

7. Démontrer que, connaissant le motif choisi par le joueur 1, le joueur 2 peut toujours choisir un motif qui a une meilleure probabilité d'apparaître.
8. Quelle est la meilleure stratégie pour le joueur 1 dans le cas où il affronterait un joueur 2 qui connait son choix ?

Exercice 3 (candidats de la voie générale NE suivant PAS l'enseignement « spé maths » et TOUS les candidats de la voie technologique)

Le Memory

Le **memory** est un célèbre jeu de mémoire dans lequel il faut retrouver des paires de cartes identiques.

Toutes les cartes sont présentées face cachée et les joueurs doivent, à tour de rôle, retourner successivement deux cartes. Si les deux cartes retournées sont identiques, on gagne la paire de cartes et on la retire du jeu. Si elles sont différentes, on remet les cartes face cachée là où elles étaient.

Dans ce problème, on considère Sacha, un joueur doté d'une **mémoire infaillible**, jouant seul à un memory initialement constitué de n paires de cartes (n étant un entier naturel non nul). On appellera **« coup »** l'action de retourner 2 cartes. Un « coup » peut conduire à deux issues différentes (« cartes identiques » ou « cartes différentes »).

Lorsque, lors d'un « coup », l'une des cartes retournées est identique à une autre carte précédemment retournée, on dira que que ces deux cartes sont ***homologues***.

Lorsque toutes les cartes seront retirées du jeu, on considèrera que Sacha aura gagné la partie.

Sacha utilise une stratégie optimale afin de gagner la partie avec le moins de coups possibles :

- Si la première carte qu'il retourne lors d'un « coup » correspond à une carte dont l'homologue a déjà été rencontrée, il retourne cette carte homologue et gagne la paire
- Sinon, la 2e carte qu'il retourne lors de son « coup » est une carte encore jamais retournée.
- Sacha possédant une mémoire infaillible, il n'a pas besoin de retourner à nouveau une carte qu'il a déjà retournée lors d'un coup précédent, à moins bien sûr que ce ne soit pour constituer une paire.

PARTIE A :

<u>Cas où n=2 :</u>

On considère ici un jeu de memory constitué de seulement 2 paires de cartes.

1. En combien de « coups » au maximum Sacha gagne-t-il la partie ? Expliquer.

2. Quelle est la probabilité que Sacha remporte la partie en 2 coups ? En 3 coups ?

PARTIE B :

<u>Cas où n=3 :</u>

On considère ici un jeu de memory constitué de 3 paires de cartes :
2 cartes avion (A) ; 2 cartes bateau (B) et 2 cartes chapeau (C). Un « coup » peut ainsi être noté par exemple (A ; C)

1. Combien de coups au minimum faudra-t-il à Sacha pour gagner la partie ?

2. Combien de coups au maximum faudra-t-il à Sacha pour gagner la partie ? Donner une suite de coups possibles où cette situation arrive.

3. Quelle est la probabilité que Sacha parvienne à constituer une paire de cartes identiques lors de son premier coup ? En déduire la probabilité d'obtenir deux cartes différentes.
4. On note R l'événement : « Sacha a réussi à obtenir une paire de cartes identiques au 1^{er} coup ». a) On suppose que R est réalisé. Quelle est la probabilité que Sacha termine la partie en 3 coups ?
   b) On suppose que R n'est pas réalisé. Quelle est la probabilité de terminer la partie en 4 coups ?
   c) Déduire des résultats précédents les probabilités de terminer la partie en 4 coups et en 5 coups.

PARTIE C :

<u>Cas où n entier naturel non nul quelconque :</u>

1. Dans le pire des cas, en combien de coups Sacha va-t-il terminer la partie ?
2. Quelle est la probabilité que Sacha termine la partie en n coups ?
3. On suppose que Sacha a déjà joué k coups et qu'il n'a encore constitué aucune paire. Quelle est la probabilité que, lors du $(k+1)$ - ième coup, Sacha parvienne à constituer une paire ?