

Exercice 1

1. **a.** Au bout d'un tour, on obtient $1 + 5 = 6$. Au bout de deux tours, on obtient $1 + 10 = 11$. En ajoutant encore 2, il vient $1 + 12 = 13$. Visuellement, on a fait 2 tours d'horloge + 2 crans.

b. Avec $n = 11$, au bout d'un tour, on a $1 + 11 = 12$. Si on avance encore d'un cran, cela donne $1 + 12 = 13$. Cette valeur de n est la seule possible. En effet, si l'équation est vérifiée 12 vaut 1 additionné à un multiple de n , et donc n divise 11, qui est premier, donc $n = 11$.

2. **a.** C'est certain, Beethoven aurait été un compositeur modeste s'il avait été bien entendant.

b. Un arrêté municipal interdit le ramassage des escargots. Une association demande de revenir sur cette décision. La mairie reste inflexible.

3. Avec une demi-coupe, les cotes sont diminuées de moitié dans toutes les directions. Donc le volume est divisé par 8. On peut donc remplir 8 demi-coupes avec une coupe entière.

4. On superpose le verre penché et le verre droit.

Avec les notations, on a $AB = \frac{AC}{2}$, car AC est le rayon du cercle, et car le verre est rempli à moitié.

Donc $\sin(x) = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, donc l'angle maximum vaut $x = 30^\circ$.

5. **a.** Si n est supérieur ou égal à 100 et si chacun paye déjà son menu à 40 euros, cela donne $40.n$ euros qui est bien supérieur à 4000 euros : l'objectif du restaurateur est atteint et les convives n'auront pas besoin de payer davantage.

Si n est strictement inférieur à 100 et si chacun paye son menu à 40 euros, cela donne au total $40.n$ euros qui est inférieur strictement à 4000 euros. Selon les conditions du restaurateur, les convives vont devoir payer un peu plus pour que la recette atteigne bien 4000 euros. Ils payeront $4000/n$ euros par personne.

Lorsque $n = 90$, on a vu que les convives vont devoir payer chacun $4000/90$ euros. C'est compris entre 4.44 euros et 4.45 euros : chacun payera donc 4.45 euros.

b. On répartit la subvention sur les 90 convives. Selon le calcul précédent, chacun payera donc $4000/90 - 1000/90$: cela donne 33.34 euros par personne.

Lorsque 120 personnes viennent, chacun paye $40 - 1000/120$ euros (chacun paye son menu – sa part de subvention). Cela donne 31.67 euros.

Si n est supérieur ou égal à 100, le prix par convive est $40 - 1000/n$. Cette quantité est minimale pour $n = 100$ et vaut 30 (euros).

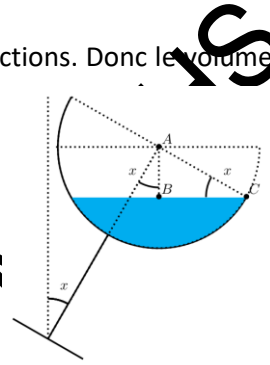
Si n est inférieur strictement à 100, le prix par convive est $4000/n - 1000/n$ c'est-à-dire $3000/n$. Cette quantité est minimale pour $n = 99$ et est supérieure à 30 (car $30 = 3000/100$).

Conclusion : le prix par convive est minimal lorsqu'il y a exactement 100 convives et le prix à payer par chacun est alors de 30 euros.

6. Notons R le rayon de la tarte. Et $x \in [0, R]$ l'endroit du bord où l'on va couper. L'aire de la portion totale de tarte vaut $\frac{\pi R^2}{4}$ et l'aire de la portion gauche de tarte vaut $\frac{x^2}{2}$. Ce dernier doit valoir la moitié de l'aire totale.

Donc $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} R$.

7. On note S le sommet d'où partent les trois arêtes à angles droits, on note A , B et C les autres sommets (C étant en arrière) et enfin, on note $a = SA$, $b = SB$ et $c = SC$. Appelons d la hauteur issue de B du triangle oblique ABC , et H le pied de cette hauteur. L'aire au carré du triangle oblique vaut $AC^2 d^2/4$. Puis dans le triangle rectangle HSB , $d^2 = SH^2 + b^2$. Mais SH est aussi perpendiculaire à AC . Donc l'aire du triangle de base, à savoir le triangle ASC , vaut à la fois $\frac{ac}{2}$ et $\frac{SH \cdot AC}{2}$. Il reste à tout recoller puisque $AC^2 = a^2 + c^2$. Dès lors, $SH^2(a^2 + c^2) = a^2 c^2$. Et donc $d^2(a^2 + c^2) = SH^2(a^2 + c^2) + b^2(a^2 + c^2) = a^2 c^2 + b^2 c^2 + a^2 b^2$.



Exercice 2

1. Quelques exemples.

a. $1 + 2 + \dots + 5 = 15$ et $7 + 8 = 15$ donc 6 est équilibré de balance 2.

b. $1 + 2 + \dots + 6 = 21$ et $8 + 9 = 17 < 21 < 27 = 8 + 9 + 10$.

c. On a

$$1 + 2 + 3 + \dots + 203 = \frac{203 \times (203 + 1)}{2} = 20706$$

et

$$(204 + 1) + (204 + 2) + \dots + (204 + 84) = \frac{84 \times (2 \times 204 + 84 + 1)}{2} = 20706$$

2. a. Si n est équilibré de balance b , on a :

$$\frac{(n-1)n}{2} = \frac{b(2n+b+1)}{2}$$

donc

$$n^2 - n = 2bn + b^2 + b$$

On en déduit que

$$b^2 + (2n+1)b + (n-n^2) = 0$$

donc b est solution d'une équation du second degré dont le discriminant est égal à $8n^2 + 1$ qui est strictement positif. L'équation admet donc deux solutions, qui sont

$$\frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2} \text{ et } \frac{-(2n+1) - \sqrt{8n^2+1}}{2}$$

Comme b est un entier strictement positif, on a nécessairement $b = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2}$

On en déduit que $8n^2 + 1 = (2(n+b) + 1)^2$ donc $8n^2 + 1$ est un carré parfait.

b. Comme $e^2 = 8n^2 + 1$, on a : e^2 est impair, ce qui impose que e l'est aussi. On en déduit que $b = \frac{e-1}{2} - n$ est un entier. Montrer que $b > 0$ revient à établir que $2n+1 < \sqrt{8n^2+1}$, ce qui est aisé en comparant les carrés de ces deux nombres positifs (on rappelle que $n > 1$).

c. La question 2.a donne le sens direct tandis que la question 2.b fournit la réciproque : puisque $b = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2}$ on a : b est solution de l'équation

$$x^2 + (2n+1)x + (n-n^2) = 0$$

ce qui montre que

$$b^2 + (2n+1)b + (n-n^2) = 0$$

On en déduit finalement que

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{b(2n+b+1)}{2} = (n+1) + (n+2) + \dots + (n+b)$$

ce qui montre que n est un nombre équilibré de balance b .

3. a. On calcule :

$$8f(x)^2 + 1 = 8(9x^2 + 6x\sqrt{8x^2 + 1} + 8x^2 + 1) + 1 = 136x^2 + 48x\sqrt{8x^2 + 1} + 9$$

et

$$(8x + 3\sqrt{8x^2 + 1})^2 = 64x^2 + 48x\sqrt{8x^2 + 1} + 9(8x^2 + 1) = 136x^2 + 48x\sqrt{8x^2 + 1} + 9$$

b. Soit n un nombre équilibré. D'après la question 2.a, $f(n)$ est bien un entier. On remarque par ailleurs que, comme $n \geq 2$, on a : $f(n) \geq 2$. Enfin, d'après la question 3.a, $8f(n)^2 + 1$ est un carré parfait. D'après la question 2.b, on conclut que $f(n)$ est un nombre équilibré.

c. On sait que 6 est un nombre équilibré. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul k , $\frac{f(k)}{k} > 1$ donc $f(k) > k$. On en déduit que les nombres

$$6, f(6), f(f(6)), f(f(f(6))), \dots$$

sont des nombres équilibrés (question 3.b.) deux à deux distincts classés dans l'ordre croissant, ce qui donne le résultat.

d. On sait que $u_k = 3u_{k-1} + \sqrt{8u_{k-1}^2 + 1}$ donc $(u_k - 3u_{k-1})^2 = 8u_{k-1}^2 + 1$ ce qui donne, après simplifications : $u_{k-1}^2 - 6u_k u_{k-1} + u_k^2 - 1 = 0$ donc u_{k-1} est solution d'une équation du second degré dont le discriminant est égal à $4(8u_k^2 + 1)$ qui est strictement positif. L'équation admet donc deux solutions, qui sont

$$3u_k + \sqrt{8u_k^2 + 1} \text{ et } 3u_k - \sqrt{8u_k^2 + 1}$$

Comme $u_{k-1} < u_k$, on a donc nécessairement : $u_{k-1} = 3u_k - \sqrt{8u_k^2 + 1}$.

e. On remarque que h est dérivable et que pour tout $x > 0$

$$h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{8x+1}} = \frac{3\sqrt{8x+1} - 8\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8x+1}}$$

Or, $(3\sqrt{8x+1})^2 = 9(8x+1) = 72x+9 > 64x = (8\sqrt{x})^2$ donc $3\sqrt{8x+1} - 8\sqrt{x} > 0$. Comme $2\sqrt{x}\sqrt{8x+1} > 0$, on en déduit que $h'(x) > 0$. Ainsi h est strictement croissante. Pour tous réels x et y tels que $0 < x < y$, on a : $0 < x^2 < y^2$ donc, comme h est strictement croissante, $h(x^2) < h(y^2)$ donc $g(x) < g(y)$. Ainsi g est strictement croissante.

f. $u_2 = f(u_1) = f(6) = 35$. Puisque n est équilibré, on déduit du résultat admis par l'énoncé que si $n \leq 35$, alors $n = 6$ ou $n = 35$. Or, $u_1 = 6$ et $u_2 = 35$ et n n'est pas de la forme u_k . On en déduit que $n > 35$, c'est-à-dire que $n > u_2$. Puisque la suite d'entiers naturels $(u_k)_{k \geq 2}$ est strictement croissante, il existe un entier $m \geq 2$ tel que $u_m < n \leq u_{m+1}$. Or, puisque n n'est pas de la forme u_k , on a : $n \neq u_{m+1}$. Finalement, $u_m < n < u_{m+1}$.

On déduit de la stricte croissance de g établie à la question 3.e que $g(u_m) < g(n) < g(u_{m+1})$. Or, d'après la question 3.d, $g(u_m) = u_{m-1}$ et $g(u_{m+1}) = u_m$. D'où $u_{m-1} < g(n) < u_m$. Comme $u_m < n$, on a donc $g(n) < u_m < n$ donc $g(n) < n$.

D'après la question 3.f, $n > 35$ donc $n > 6$. Or, n est un nombre équilibré. On vérifie (comme on l'a fait avec $f(n)$) que $g(n)$ l'est aussi. On en déduit que $g(n)$ est un nombre équilibré qui ne s'écrit pas sous forme u_k pour un certain entier $k \geq 1$. Finalement que n n'est pas le plus petit nombre équilibré ne s'écrivant pas sous forme u_k pour un certain entier $k \geq 1$, ce qui est absurde par définition de n . Ainsi, tout nombre équilibré est de la forme u_k pour un certain entier $k \geq 1$.

4. a. Soit $n \geq 2$ un entier. Alors $u_{k+1} = 3u_k + \sqrt{8u_k^2 + 1}$ et, d'après la question 3.d, $u_{k-1} = 3u_k - \sqrt{8u_k^2 + 1}$. Donc $u_{k+1} = 3u_k + (3u_k - u_{k-1}) = 6u_k - u_{k-1}$

b. Dans `s`, on calcule `s=1+...+i` jusqu'à ce que `i` arrive à `n` (exclu). La fonction `mystere(n)` calcule donc la somme $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$.

c. On déduit de la question 4.b la fonction suivante.

```
def equilibre(n):  
    k=mystere(n)    #k vaut 1+2+...+(n-1)  
    s=n+1  
    i=n+2  
    while s<k:  
        s=s+i  
        i=i+1  
    return s==k
```

Dans s, on calcule $s=(n+1)+\dots+i$ jusqu'à ce que cette somme dépasse le seuil k. On regarde alors si la balance est équilibrée.

Mais on peut aussi écrire la fonction suivante, de complexité bien meilleure, en exploitant la question 4.a.

```
def equilibre(n):  
    (a,b)=(6,35)  
    while a<n:  
        (a,b)=(b,6*b-a)  
    return a==n
```

Enfin, on peut également utiliser la caractérisation 2.c.

5. On propose ici aussi deux solutions, la seconde étant plus efficace que la première.

La première fonction utilise la question 4.c.

```
def liste_equilibres(n):  
    l=[]  
    for i in range(2,n):  
        if equilibre(i):  
            l.append(i)  
    return l
```

La seconde fonction exploite encore la question 4.a.

```
def liste_equilibres(n):  
    l=[]  
    (a,b)=(6,35)  
    while a<n:  
        l.append(a)  
        (a,b)=(b,6*b-a)  
    return l
```

Remarques

La balance de 6930 est 2870.

La balance de 235416 est 97512.

La balance de 313506783024 est 129858761424.

liste_equilibres(1000000000000)

renvoie

[6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416, 1372105, 7997214, 46611179, 271669860, 1583407981, 9228778026, 53789260175, 313506783024]

Exercices 3

Identique à l'exercice 2. À la numérotation et à ceci près :

1. Méthode de Gauss

2. Par exemple en soustrayant deux sommes partant de 1 (ou bien en regroupant tous les n).

6.

```
def liste_equilibres(n)
    l = []
    u = 6
    for compteur in range(n)
        l.append(u)
        u = 3*u+sqrt(8*u**2 + 1)
    return(l)
```

INSPECTION GÉNÉRALE MATHS