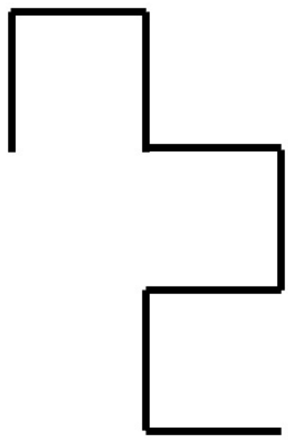
Initiation à la courbe du dragon - Corrigé

1)



2) $u_3 = \{1,1,0,1,1,0,0\}$
$u_4 = \{1,1,0,1,1,0,0,1,1,1,0,0,1,0,0\}$

3) A chaque pliage, on a 2^n pages formées, reliées par $2^n - 1$ plis. C'est donc le nombre de chiffres dans la liste de u_n.

4) Une feuille qui a subi $n + 1$ étapes pliages successifs est une feuille qui a été pliée 1 fois, avant d'être pliée n fois. Or quand une feuille est pliée en deux, ce sont les plis de la demi-feuille placée en dessous qui vont constituer la suite de la première moitié des chiffres. Cette demi-feuille va subir n étapes de pliage/dépliage : ses plis vont donc être égaux à ceux indiqués par u_n. Ils vont donc former tous les premiers chiffres de la liste de u_{n+1}.

5) a) A la $n -$ ème étape de pliage/dépliage, un pli reste toujours le même, sans être modifié : c'est celui qui coupe la feuille en deux, et c'est un pli à droite, qui vaut donc 1. Or ce pli est forcément le pli médian. Comme il y a $2^n - 1$ plis, ce pli médian est tel qu'il y a le même nombre de chiffres avant et après.
On a $(2^n - 1 + 1) \div 2 = 2^{n-1}$. Donc la position du pli médian est le $2^{n-1} -$ ème chiffre.
Donc $p_n(2^{n-1}) = 1$.

b) On applique un principe de miroir. Le pli médian sépare deux demi feuilles qui se superposent. Quand la première demi-feuille fait une suite de plis, la seconde demi-feuille qui commence à partir du pli médian fait exactement la même suite de plis mais dans le sens inverse. De ce fait le 1er pli qui suit le pli médian fait exactement le chemin inverse que le 1er pli qui précédait le pli médian. On a donc bien : $p_n(2^{n-1} + 1) = 1 - p_n(2^{n-1} - 1)$. Ce principe s'applique à tous les plis suivants, jusqu'à $l = 2^{n-1} - 1$ puisque $2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$.
Donc pour tout l tel que $1 \leq l \leq 2^{n-1} - 1$, $p_n(2^{n-1} + l) = 1 - p_n(2^{n-1} - l)$.

6) Pour tout $n \geq 11, p_n(2025)$ va rester constant, puisqu'on a plus de $2^{11} - 1 = 2047$ chiffres à partir de la liste de u_{11}, et que ces premiers chiffres vont rester constants comme trouvé à la question 4). Donc à l'infini : $p(2025) = p_{11}(2025)$.

Or $p_{11}(2025) = p_{11}(2^{10} + 1001) = p_{11}(2^{10} - 1001) =$
$1 - p_{11}(2^{10} - 1001) = 1 - p_{11}(23)$

Puis $1 - p_{11}(23) = 1 - p_5(23) = 1 - \ p_5(2^4 + 7) = 1 - (1 - p_5(2^4 - 7)) = p_5(9)$
$p_5(9) = p_4(9) = p_4(2^3 + 1) = 1 - p_4(2^3 - 1) = 1 - p_4(7)$
$1 - p_4(7) = 1 - p_3(7) = 1 - p_3(2^2 + 3) = 1 - (p_3(2^2 - 3)) = p_3(1) = 1.$

Donc $p(2025) = 1.$

7) a) En passant de la $n - \text{è}me$ étape à la $(n + 1) - \text{è}me$ étape, le pli supplémentaire ajoute un pli ENTRE tous les plis déjà présents à la $n^{\text{ème}}$ l'étape. En faisant ceci, on rajoute un nouveau chiffre entre tous les chiffres existants, sachant qu'à chaque fois, ce sont les plis situés sur des positions impaires qui sont « nouveaux » (puisque le premier pli est toujours celui formé sur la feuille situé le plus en bas). De ce fait, un chiffre situé à la k-ième position de la liste après n étapes est décalé et se retrouve à $2k - \text{è}me$ position à l'étape suivante $n + 1$. Donc on a bien : $p_{n+1}(2k) \ = \ p_n(k)$, donc de manière plus générale pour le nombre p : $p(2k) \ = \ p(k)$

b) On appelle h le plus grand nombre impair divisant k. On a donc un s entier maximal tel que : $k = h2^s$.
De la question 7) a), on en déduit que $p(k) = p(h2^{s-1}) = p(h2^{s-2}) \ldots . = p(h2^{s-s}) = p(h).$

8) Pour tout entier h impair, on peut trouver un n maximal tel que $2^n < h.$
Posons $l = h - 2^n$. Comme h est impair, l est aussi impair.
On a alors $p(h) = p(2^n + l) = 1 - p(2^n - l).$
On remarque alors que $h_1 = 2^n - l$ est aussi forcément impair, et forcément positif car si on avait $2^n - l < 0$, on aurait $2^n < l$, puis $2^n + 2^n < 2^n + l = h$ et donc $2^{n+1} < h$: n ne serait plus l'entier maximal tel que $2^n < h.$

En appliquant à nouveau le même principe à h_1, on peut trouver un autre h_2, impair et positif, inférieur à h_1, tel que $1 - p(h_1) = p(h_2).$

Puis en continuant, on a donc : $p(h) = 1 - p(h_1) = p(h_2) = 1 - p(h_3)$ ... etc

On construit ainsi une suite de nombres (h_n) d'entiers impairs positifs strictement décroissante, minorée par 0. Cette suite aboutit donc forcément à 1. Donc le calcul de $p(h)$, avec h impair, se ramène bien au calcul de $p(1).$

9) L'algorithme à utiliser se déduit des questions précédentes :
Si k est pair, on le divise par 2 puisque $p(k) \ = \ p\left(\frac{k}{2}\right)$
On le divise ainsi jusqu'à trouver le premier h impair tel que $k = h2^s$.

Une fois trouvé le nombre impair, on applique le fait que $p(h) = p(2^n + l) = 1 - p(2^n - l)$, en cherchant à chaque fois le plus grand n tel que $2^n < h$. On applique successivement cet algorithme comme à la question 8), jusqu'à se ramener à 1.

D'où *un* algorithme possible est (page suivante) :

```
def p(k):
    while k%2==0:
        k=k/2
        if k==1:
            return 1
    a=0
    while k>2:
        n=0
        x=0
        while 2**n<k:
            if 2**(n+1)==k:
                k=2
                x=1
            else:
                n=n+1
        if x==1:
            break
        k=2**(n-1)-(k-2**(n-1))
        a=a+1
    if a%2==0:
        return 1
    else:
        return 0
```

CASINO DE PENROSE

Solution.

Partie A

1. On compare les espérances de chaque dé, c'est-à-dire la moyenne pondérée par les probabilités à chaque lancer :

E(A)=3 E(B)=16/6=8/3 E(C)=18/6=3 E(D)=20/6=10/3 donc E(B)<E(A)=E(C)<E(D).

2. a) On peut faire 6 matchs.

b) et c) On peut estimer sans calculer lors de chaque match. Faisons des calculs rapides à l'aide d'un tableau à double entrée ou d'un arbre de probabilités :

A contre B	4	4	0
3	B	B	A

B gagne avec une probabilité de 2/3

B contre C	4	4	0
1	B	B	C
5	C	C	C

C gagne avec une probabilité de 2/3

C contre D	6	2	2
1	D	D	D
5	D	C	C

D gagne contre C avec une probabilité de 2/3

d) Il reste 3 matchs possibles, mais on peut remarquer que A gagne contre D avec une probabilité de 2/3 :

A contre D	6	2	2
3	D	A	A

De même, D gagne avec une probabilité de 5/9 contre B, et A et C sont équitables (match nul).

Bilan : si l'adversaire choisit A on choisit B; si l'adversaire choisit B on choisit C; si l'adversaire choisit C, on choisit D; si l'adversaire choisit D, on choisit A.

e) Contre un dé choisit au hasard, calculons les probabilités de gagner de chaque dé :
P(A) = 1/3(1/3+1/2+2/3)=1/2; P(B)=1/3(2/3+1/3+4/9)=13/27 ; P(C)=1/3(1/3+1/2+2/3)=1/2; P(D)=1/3(1/3+5/9+2/3)=14/27.
Globalement, le meilleur dé pour gagner est D.
f) A : 1 3 3 3 B : 1 1 4 4 et C : 2 2 2 4

Partie B
1. 8 motifs sont possibles (épreuves de Bernoulli avec 3 répétitions indépendantes et équiprobabilité), chacun de probabilité 1/8 .
2.

		P	*P*	*F*	*P*	*P*	*P*
gains		2	4+2	0	2	4+2	8+4+2
Mise et perte	1	2+1	4+2+1	1	2+1	4+2+1	

Bilan : 8+4+2-6=+8€
Autre présentation possible (pratique pour la suite) :
lancer 1 :

résultats	P	P	F
pari	P	P	P
gain	2	4	**0**

lancer 2 :

résultats	P	F	P
pari	P	P	P
gain	2	**0**	

lancer 3 :

résultats	F	P	P
pari	P	P	P
gain	**0**		

lancer 4 :

résultats	P	P	P
pari	P	P	P
gain	2	4	**8**

lancer 5 :

résultats	P	P	
pari	P	P	P
gain	2	**4**	

lancer 6 :

résultats	P		
pari	P	P	P
gain	**2**		

En prenant en compte la mise de 1€ avant chaque lancer, le bilan est de : $8 + 4 + 2 - 6 = +8$€.
3. pour 1€ misé : 1/2×2-1=0 de même pour 2€ et 4€ misés…
4. En 3 tours, c'est un schéma de Bernoulli de 3 épreuves indépendantes, et tous les motifs sont bien équiprobables avec une probabilité de 1/8.
5. Supposons que le joueur 1 ait choisi PPP.
Si $\ldots^{*}\ PPP$ apparaît pour la première fois au bout du lancer $n > 3$, alors * juste avant était F (sinon PPP serait apparu avant le lancer n). Le motif FPP apparaît avant ! La seule exception est quand la suite débute par PPP avec une probabilité de 1/8.
Ainsi, FPP apparaît plus tôt que PPP avec la probabilité 7/8. (Par symétrie, PFF apparaît plus tôt que FFF avec la probabilité 7/8).

6.

a) Joueur 1 :FPP Joueur 2 :FFP.

Bilan financier du joueur 2 qui mise 1€ offert par le joueur 1 avant chaque lancer : ces mises sont neutres pour lui, et jusqu'au lancer$n-3$ son bilan est de 0€ (il ne rien reçoit du casino et ne doit rien reverser au joueur 1).

si FFPapparaît en premier

à $n-2$:

résultats	F	F	P
pari	F	F	P
gain	2	4	**8**

à $n-1$:

résultats	F	P
pari	F	F
gain	2	**0**

à n :

résultats	P
pari	F
gain	**0**

Le joueur 2 reçoit : $8+0+0=8$€

à $n-2$:

résultats	F	F	P
pari	F	P	P
gain	2	**0**	

à $n-1$:

résultats	F	P
pari	F	P
gain	2	**4**

à n :

résultats	P
pari	F
gain	**0**

Le joueur 2 doit rembourser : 0+4+0=4€

BILAN : +8-4=+4€

siFPPapparaît en premier

à $n-2$:

résultats	F	P	P
pari	F	F	P
gain	2	**0**	

à $n-1$:

résultats	P	P
pari	F	F
gain	**0**	

à n :

résultats	P
pari	F
gain	**0**

Le joueur 2 reçoit $0+0+0=0$€

à $n-2$:

résultats	F	P	P
pari	F	P	P
gain	2	4	**8**

à $n-1$:

résultats	P	P
pari	F	P
gain	**0**	

à n :

résultats	P
pari	F
gain	**0**

Le joueur 2 doit rembourser : 8+0+0=8€

BILAN : 0-8=-8€

b) Le bilan financier du joueur 2 traduit les côtes entre les probabilités d'apparitions deFFPet deFPP. C'est du 4 contre 8 pourFFP. Autrement dit, à chaque lancer avec cette stratégie, pour 4€ de gain le joueur 2 risque de perdre 8€. Le jeu étant équitable pour toutes les parties et la stratégie du joueur étant neutre, en notant P($FFP \prec FPP$) la probabilité que FFPapparaisse avant FPP, on traduit l'espérance de gain du joueur 2 par : 4×P($FFP \prec FPP$) -8×P($FPP \prec FFP$)=0.
(les gains sont contrebalancés par les probabilités)
Et donc : 4×P($FFP \prec FPP$)=8(1-P($FFP \prec FPP$)) soit P($FFP \prec FPP$)=8/(4+8)=8/12=2/3
7. Des exemples précédents, on peut conjecturer une stratégie pour le joueur 2 connaissant le choix du joueur 1 : si le joueur choisitABC, le joueur 2 choisit$\bar{B}AB$.
De la même façon qu'à la question 6), on peut alors comparerFFPetPFF, puisFPFetFFP.
Par symétrie, on obtient les résultats suivants :

Dans tous les cas, on peut trouver un motif qui a plus de chances d'apparaître avant le motif choisi par le joueur 1.
Tableau récapitulatif avec la probabilité que joueur 2 gagne contre joueur 1 :

	FFF	FFP	FPF	FPP	PFF	PFP	PPF	PPP
FFF		1/2	3/5	3/5	7/8	7/12	7/10	1/2
FFP	1/2		1/3	1/3	3/4	3/8	1/2	3/10
FPF	2/5	2/3		1/2	1/2	1/2	5/8	5/12
FPP	2/5	2/3	1/2		1/2	1/2	1/4	1/8
PFF	1/8	1/4	1/2	1/2		1/2	2/3	2/5
PFP	5/12	5/8	1/2	1/2	1/2		2/3	2/5
PPF	3/10	1/2	3/8	3/4	1/3	1/3		1/2
PPP	1/2	7/10	7/12	7/8	3/5	3/5	1/2	

Les meilleures réponses du joueur 2 sont indiquées en rouge.
8. Cette question demande de faire le tableau précédent complètement (la symétrie aide…).
Il s'agit pour le joueur 1 de minimiser les chances de gagner du joueur 2 (en supposant que le joueur 2 applique une stratégie optimale).
On constate que les choixFPF,FPP,PFFetPFPont la plus faible probabilité de perdre, égale à 2/3.

Correction : le memory

I. Cas où n=2 :

1) Si les cartes retournées lors du 1er coup sont différentes, la première carte que Sacha retourne au 2e coup est nécessairement identique à l'une des deux du 1er coup. Il peut donc constituer la paire correspondante et il ne reste plus que 2 cartes cachées qui formeront la dernière paire. **Sacha gagne en 3 coups au maximum.**

2) Sacha remporte la partie en 2 coups s'il a la chance de découvrir une paire dès le premier coup et en 3 coups sinon. Après avoir retourné sa première carte, une seule carte parmi les 3 restantes est identique à celle qu'il vient de retourner.
- La probabilité de gagner en 2 coups est $\frac{1}{3}$
- La probabilité de gagner en 3 coups est $\frac{2}{3}$

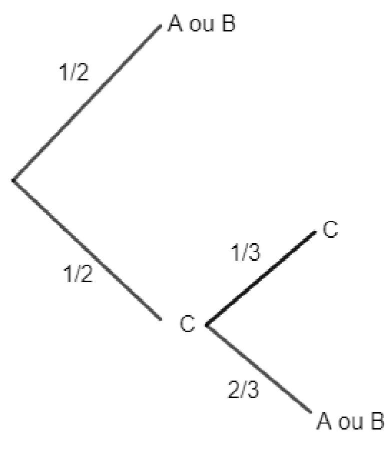
II. Cas où n=3 :

1) Sacha a besoin **d'un minimum de 3 coups** pour constituer les 3 paires.
2) Le pire scénario arrive dans le cas où à chaque coup, Sacha commence par retourner une carte dont le symbole n'a jamais été vu puis il retourne ensuite une carte dont il a déjà vu l'homologue. Dans ce cas, la partie **se termine en 5 coups** :
exemple : (A ; B) ; (C ; A) ; (A ; A) ; (B ; B) ; (C ; C)
3) La probabilité d'obtenir deux cartes identiques lorsqu'elles sont toutes inconnues est égale à $\frac{1}{5}$. Donc la probabilité d'obtenir deux cartes différentes est égale à $\frac{4}{5}$
4) a) Si l'événement R est réalisé, on est ramené après le 1er coup au cas où $n = 2$ et il faut donc réussir à terminer la partie en 2 coups. D'après le résultat donné en partie 1, cela arrive avec **une probabilité de $\frac{1}{3}$.**

b) Si Sacha n'a pas réalisé R, cela signifie qu'il a retourné deux symboles différents. Sans perte de généralité, on peut supposer que ce coup soit (A, B).
Si Sacha veut terminer la partie en 4 coups, il n'a plus droit à l'erreur (il lui reste 3 coups pour constituer 3 paires).

Calculons d'abord la probabilité que Sacha forme une paire au 2e coup (sachant qu'il connaît déjà 2 cartes sur les 6) et appelons R_2 cet événement :

- Si Sacha retourne une carte A ou une carte B (il a une chance sur deux), il réussit dans tous les cas à former une paire puisqu'il a déjà retourné le couple $(A; B)$ au 1er coup.
- Si Sacha retourne une carte C , il doit trouver l'autre carte C parmi 3 cartes inconnues (il a une chance sur 3). Ainsi, le deuxième coup de Sacha peut être modélisé par l'arbre ci-contre :



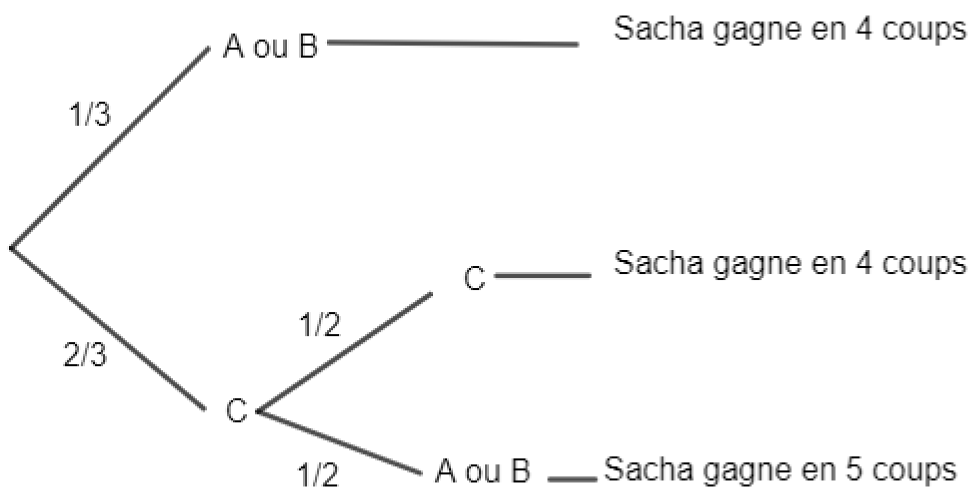
Ainsi, $P(R_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Si R_2 n'est pas réalisé, Sacha ne peut plus gagner en 4 coups puisqu'il a toujours 6 cartes devant lui.

Poursuivons le raisonnement et regardons ce qu'il peut se passer au 3e coup si Sacha a réalisé R_2 :

- 1er cas : Sacha a réalisé R_2 en obtenant la paire A ou la paire B. Dans ce cas, Sacha a face à lui 4 cartes dont une connue qui est une carte A ou une carte B. Il va donc choisir une carte inconnue parmi les trois :
  - S'il commence lors de son 3e coup par retourner une carte A ou B (1 chance sur 3), il termine la partie en 4 coups.
  - Sinon, il retourne une carte C et il a une chance sur deux d'obtenir la paire C

  On peut modéliser ce cas avec l'arbre suivant :



- 2e cas : Sacha a réalisé R_2 en trouvant la paire C. Dans ce cas, il gagne toujours en 4 coups car il lui reste 4 cartes dont 2 connues donc il gagnera les paires A et B en deux coups seulement.

BILAN : si *R* n'est pas réalisé,

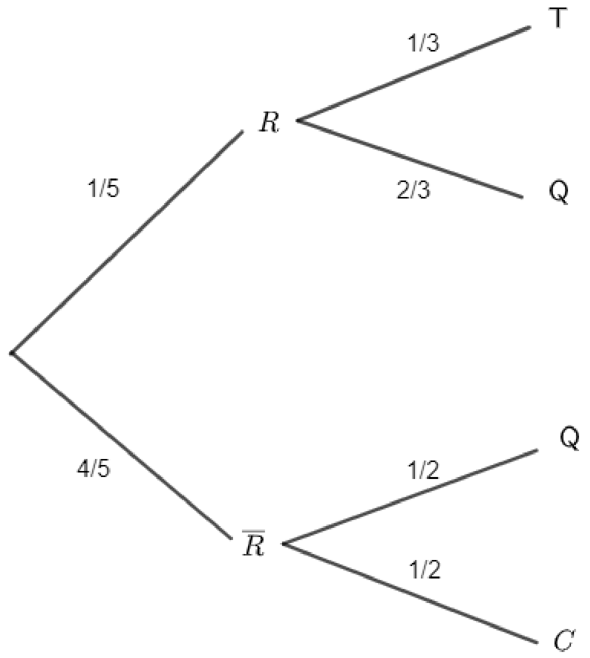
la probabilité que Sacha termine en 4 coups est égale à :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

la probabilité que Sacha termine en 5 coups est égale à :

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

c) Soient les événements :
T : « Sacha termine la partie en **T**rois coups »
Q : « Sacha termine la partie en **Q**uatre coups »
C : « Sacha termine la partie en **C**inq coups ».
Rappelons que l'événement « Sacha réalise une paire lors de son 1er coup » a été noté R.
Réalisons une fois encore un arbre pondéré **:**



On obtient donc :

$$P(Q)=\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{15}$$

$$P(C)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$$

III. <u>Cas où n entier naturel non nul quelconque :</u>

1) Appelons « symbole » le dessin présent sur une carte. Dans le pire des cas, Sacha commence par retourner deux cartes différentes.
A chaque coup, il commence par retourner une carte dont il n'a jamais découvert l'homologue puis sa 2e carte est une carte dont il a déjà vu l'homologue. Ainsi :
- il découvre deux symboles lors de son premier coup.
- A chaque coup suivant, il ne découvre qu'un seul symbole encore inconnu. Il lui faut donc au minimum $n-2$ coups pour découvrir tous les symboles.
- Il peut à présent constituer les n paires puisqu'il a vu tous les symboles.
Résultat : dans le pire scénario, Sacha a besoin de $1+n-2+n=2n-1$ coups

2) Sacha termine la partie en n coups s'il ne fait aucune erreur :

- 1^{er} coup : il choisit n'importe quelle carte puis il a une probabilité $\frac{1}{2n-1}$ de trouver l'homologue
- 2^{e} coup : s'il a réussi à constituer une paire lors du premier coup, il choisit n'importe quelle carte puis il doit choisir la bonne carte parmi les $2n-3$ cartes encore présentes.
- coups suivants : ce même raisonnement peut être réitéré jusqu'à ce qu'il ne reste plus que 2 cartes (qui constituent à coup sûr une paire). La probabilité cherchée est donc :

$$P = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)(2n-5) \times \ldots \times 3}$$

3) Dans ce cas-là, Sacha connaît déjà le symbole de $2k$ cartes (toutes différentes). Il lui reste donc à découvrir celui de $2(n-k)$ cartes. Notons que si $k \geq n/2$, Sacha connaît tous les symboles et la probabilité de découvrir une paire au coup suivant est donc égale à 1.

Traitons à présent le cas $k < \frac{n}{2}$. Il y a deux scénarios possibles :

1^{er} scénario :

si la $1^{\text{ère}}$ carte retournée lors du $(k+1)-ième$ coup est un symbole connu, Sacha gagne une paire à coup sûr. Cet événement est de probabilité $\frac{2k}{2(n-k)} = \frac{k}{n-k}$.

2^{e} scénario :

Sacha commence par découvrir une carte de symbole inconnu (probabilité $1 - \frac{k}{n-k}$). Dans ce cas, il doit choisir la bonne carte parmi les $2n-2k-1$ cartes inconnues restantes.

Finalement, la probabilité de constituer une paire lors du $(k+1)-ième$ coup est égale à :

$$\frac{k}{n-k} + \left(1 - \frac{k}{n-k}\right) \times \frac{1}{2n-2k-1}$$