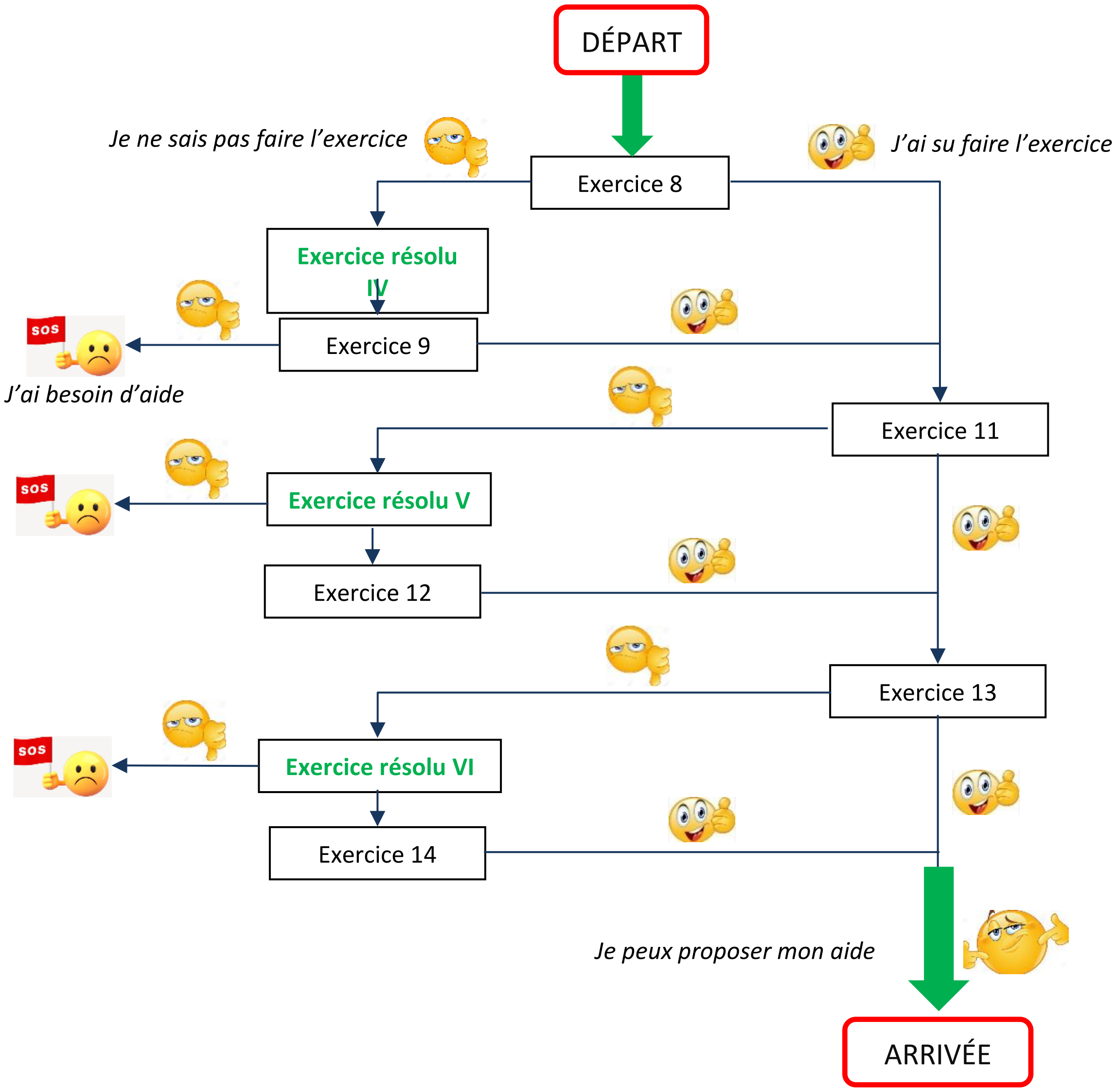
Liaison BCP-BTS	Fonction logarithme népérien – Parcours fléché Variations et équations



Propriétés opératoires de la fonction ln

Exercice 1 Simplifier les expressions.

A = $\ln(e^5)$ B = $3\ln(e^8) - 5\ln(e^3)$

Exercice 2 Justifier le résultat donné par une calculatrice

Exercice 3 Exprimer en fonction de ln(2).

A = $\ln(8)$ B = $\ln(\frac{1}{16})$ C = $-3\ln(32)$

Exercice 4 Exprimer en fonction de ln(3).

A = $\ln(9)$ B = $\ln(\frac{1}{27})$ C = $\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{9})$

Exercice 5 Exprimer en fonction de ln(2) et ln(3).

A = $\ln(36)$ B = $\ln(\frac{1}{24})$ C = $\ln(144)$ D = $\ln(\frac{9}{8})$

Exercice 6 Exprimer A et B avec un seul logarithme.

A = $5\ln(2) + \ln(8) + \ln(\frac{1}{2})$ B = $4\ln(\frac{1}{3}) + \ln(9)$

Exercice 7 Sachant que $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$, sans calculatrice, compléter le tableau.

a	4	9	6	27	1/18	8/9
$\ln(a)$						

Utilisation de la variation de la fonction ln

Exercice 8 Sans la calculatrice comparer dans chaque cas les nombres A et B.

1) A = $3\ln(2)$ et B = $2\ln(3)$
2) A = $\ln(5) - \ln(2)$ et B = $\ln(12) - \ln(5)$

Exercice 9 Déterminer sans calculatrice le signe des nombres.

A = $\ln(0,1)$ B = $\ln(\frac{213}{212})$ C = $\ln(3) - \ln(5)$ D = $\ln(\frac{99}{100})$

Exercice 10 Soit a un réel tel que $\ln a < 1$ et $\ln a > \ln 2$. Donner l'intervalle d'encadrement de a à 10^{-1} près.

Résolution d'équations

Exercice 11 Résoudre les équations.

1) $2^x = 128$ 2) $3^x = 12,34$
3) $\ln(x) - 1 = 3$ 4) $\ln(x + 3) = 0$

Exercice 12 Résoudre les équations.

1) $5^x = 2500$ 2) $1,2^x = 5,5$
3) $2\ln(x) + 2 = 3$ 4) $\ln(2x - 5) = 1$

Étude de fonctions

Exercice 13 Déterminer les dérivées des fonctions.

1) $f(x) = 5x^2 + \ln(x)$
2) $g(x) = 10x + 8 - 7\ln(x)$

Exercice 14 Déterminer les dérivées des fonctions.

1) $f(x) = 4x^3 + 2\ln(x) - 6$
2) $g(x) = 5x + 1 - 4\ln(x)$

Exercice 15 Niveau de pression acoustique

Le son se manifeste par des variations de la pression p de l'air (en Pascal) sur le tympan de l'oreille.

Si p est supérieur ou égale à 20×10^{-6} Pa (limite de pression acoustique détectable), l'oreille humaine perçoit un son dont le niveau, en décibel, s'exprime par :

$$L(p) = \frac{20}{\ln 10}\ln(50\,000p)$$

1) Déterminer le niveau sonore si $p = 20 \times 10^{-6}$ Pa.
2) Même question si $p = 2$ Pa.
3) À partir 120 décibels, on ressent une douleur. Déterminer la pression acoustique correspondante.

Exercice 16 Datation au Carbone 14

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,2 ; 1] par $f(x) = -8\,064\ln(x)$.
1) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
2) Donner le sens de variation de la fonction f.
3) En utilisant une fenêtre graphique adaptée, obtenir à la calculatrice la courbe représentative de f.
4) Dresser le tableau de variations de f.

Partie B : applications

Tant qu'un organisme est vivant (plante ou animal), le pourcentage de carbone 14 qu'il contient est constant. Après la mort de cet organisme, il diminue.
La mesure du pourcentage de carbone 14 restant permet de dater les organismes, à condition qu'ils aient moins de 50 000 ans.
Si x est le pourcentage de carbone 14 restant dans un organisme, alors $f(x) = -8\,064\ln(x)$ est son âge en années.

1) Calculer l'âge d'un organisme qui contient encore 35% de son carbone 14. Arrondir à la centaine d'années.
2) Déterminer graphiquement et algébriquement le pourcentage de carbone 14 restant dans un organisme vieux de 30 000 ans.

Liaison BCP-BTS	Fonction logarithme népérien - Exercices résolus

Exercice I Simplifier les expressions suivantes.

$A = \ln(\frac{3}{e^4})$

$A = \ln(\frac{3}{e^4}) = \ln(3) - \ln(e^4) = \ln(3) - 4\ln(e) = \ln(3) - 4$ *On a utilisé les propriétés ② et ④ puis l'égalité ln(e) = 1*

$B = 2\ln(e^5) - 3\ln(e^2)$

$B = 2 \times 5\ln(e) - 3 \times 2\ln(e) = 2 \times 5 - 3 \times 2 = 10 - 6 = 4$ *On a utilisé la propriété ④ puis l'égalité ln(e) = 1*

Exercice II Exprimer en fonction de ln(5).

$A = \ln(25)$ $B = 2\ln(\frac{1}{125})$

$A = \ln(25) = \ln(5^2) = 2\ln(5)$ *Penser aux puissances de 5* *On a utilisé la propriété ④*

$B = 2\ln(\frac{1}{125}) = -2\ln(125) = -2 \times \ln(5^3) = -2 \times 3\ln(5) = -6\ln(5)$ *On a utilisé les propriétés ③ et ④*

Exercice III Exprimer en fonction de ln(5) et ln(2)

$A = \ln(40)$ ***$A = \ln(5 \times 8) = \ln 5 + \ln 8 = \ln 5 + \ln 2^3 = \ln 5 + 3\ln 2$*** *Propriétés 1 et 4*

Exercice IV Sans la calculatrice comparer les nombres A et B.

$A = 4\ln(3)$ et $B = 3\ln(4)$

$A = \ln(3^4) = \ln(81)$ ***$B = \ln(4^3) = \ln(64)$***

La fonction ln étant strictement croissante sur R_+^* $a > b \Leftrightarrow \ln(a) > \ln(b)$ ***On a 81 > 64 donc A > B***

Exercice V Résoudre les équations.

La fonction ln étant strictement croissante sur R_+^* $a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$ ***Penser aux égalités ln(e) = 1 et ln(1) = 0***

1) $4^x = 20$

$\ln(4^x) = \ln(20)$

$x\ln(4) = \ln(20)$

$x = \frac{\ln(20)}{\ln(4)}$

$x \approx 2,2$

2) $\ln(x) + 2 = 5$

$\ln(x) = 3$

$\ln(x) = 3 \times \ln(e)$

$\ln(x) = \ln(e^3)$

$x = e^3$

$x \approx 20,1$

3) $\ln(3x - 4) = 0$

$\ln(3x - 4) = \ln(1)$

$3x - 4 = 1$

$3x = 5$

$x = \frac{5}{3}$

$x \approx 1,7$

Exercice VI Déterminer les dérivées des fonctions.

sur R_+^* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

1) $f(x) = 2\ln(x) - x$

$f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} - 1$

$f'(x) = \frac{2}{x} - 1$

2) $g(x) = 10x^3 + 3\ln(x) - 15$

$g'(x) = 10 \times 3x^2 + 3 \times \frac{1}{x} - 0$

$g'(x) = 30x^2 + \frac{3}{x}$