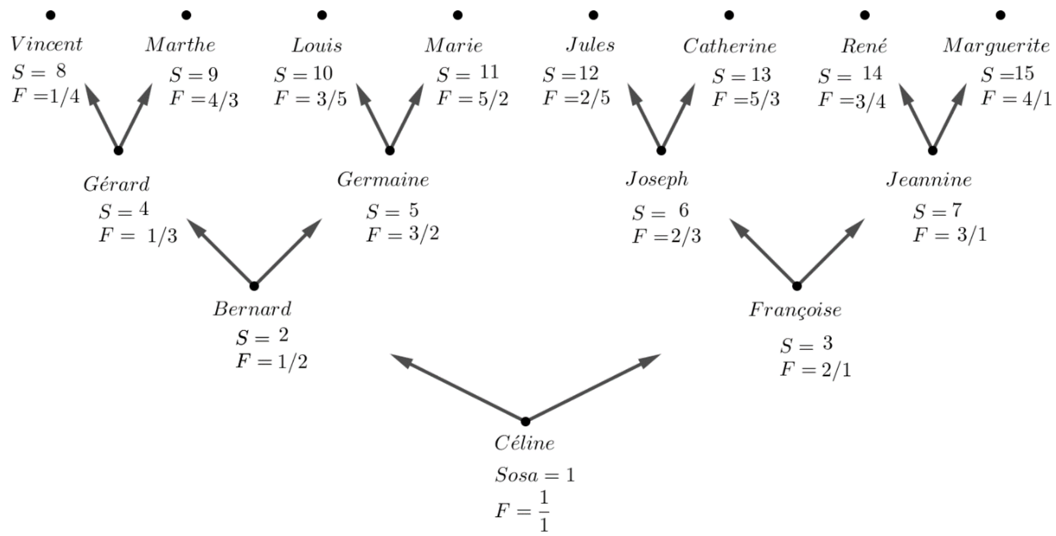
Corrigé académique Olympiades 2024

Exercice 1 : Arbre généalogique d'ascendance

Correction

1.a)



b) Masculin, car son n° de Sosa est pair.

c) 126 car 2023-1011-505-252-126 et 2024-1012-506-253-126

2. a) *pmpmpmm.*Le dernier élément du chemin étant un *m* la personne est de sexe féminin.

On joint successivement 1-2-5-10-21-42-85 et 171.

b) 2024-1012-506-253-126-63-31-15-7-3-1. Le chemin est donc *mmmmmpmppp.*

3. a) RAS

b) $\frac{41}{15} \leftarrow \frac{26}{15} \leftarrow \frac{11}{15} \leftarrow \frac{11}{4} \leftarrow \frac{7}{4} \leftarrow \frac{3}{4} \leftarrow \frac{3}{1} \leftarrow \frac{2}{1} \leftarrow \frac{1}{1}$. Puisqu'il existe un chemin remontant jusqu'à la racine ceci prouve bien que cette fraction est dans l'arbre. Elle correspond au n° de Sosa 435 :1-3-7-14-29-59-108-217-435

c) A partir de n'importe quelle fraction irréductible différente de 1/1, il est possible de remonter à la génération précédente par le mécanisme :

Si $\frac{u}{v} < 1$ (c'est un père) alors son descendant correspond à $\frac{u}{v - u}$ alors que si

si $\frac{u}{v} < 1$ (c'est une mère) alors son descendant correspond à $\frac{u - v}{v}$. La somme du numérateur et du dénominateur étant strictement croissante quand on remonte l'arbre, elle est strictement décroissante quand on redescend et cela nous oblige à redescendre jusqu'à la fraction 1/1.

d) . Le chemin de 2024 est *mmmmmpmppp*.

e) L'individu correspondant à 2^n se trouve sur la gauche du tableau et n'utilise que des liens paternels. Le numérateur ne change jamais et reste donc égal à 1, le dénominateur augmente donc à chaque étape de 1. La fraction correspondante est donc 1/(*n*+1).

4. Si p/q est la fraction correspondant à l'enfant de u_n et u_{n+1} alors

$$u_{n+1} = \frac{p+q}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p+q}} = \frac{1}{1-\frac{p}{p+q}} = \frac{1}{1-u_n}.$$

5. a) Pour redescendre de la personne *k* à *n* il faut redescendre *y* fois du côté maternel puis une fois du côté paternel.

b) Partant de $\frac{r}{s}$, la première étape conduit à $\frac{r}{r+s}$ (père), puis on augmente de 1 à chaque étape (mère), *y* fois.

Donc $u_n = y + \frac{r}{r+s}$.

c) Pour u_{n+1} c'est le contraire, il y a *y* étapes côté paternel puis une seule, côté maternel. Partant de $\frac{r}{s}$, la première étape conduit à $\frac{r+s}{s}$, puis à chaque fois, le numérateur reste invariant alors que le dénominateur augmente de *r*+ *s.* Donc

$$u_{n+1} = \frac{r+s}{s+y(r+s)} = \frac{1}{\frac{s+y(r+s)}{r+s}} = \frac{1}{y+\frac{s}{r+s}}$$

6. Pour *n* pair on $u_n < 1$ donc $\mathrm{int}(u_n) = 0$. Or $u_{n+1} = \frac{1}{1-u_n}$, ce qui correspond bien à la formule.

Pour *n* impair et non en bout de ligne,

$$u_n + \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{r+y(r+s)}{r+s} + \frac{s+y(r+s)}{r+s} = \frac{(2y+1)(r+s)}{r+s} = 2y+1.$$

Donc $\frac{1}{u_{n+1}} = 2y + 1 - u_n$, donc $u_{n+1} = \frac{1}{2y+1-u_n}$.

Enfin pour $n = 2^n - 1$ on a $u_n = n$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1-n} = \frac{1}{2\,\mathrm{int}(u_n)+1-u_n}$.

Exercice 2 : **Polyèdres**

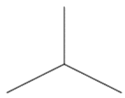
Correction

Partie A

	Solide 1	Solide 2	Solide 3	Solide 4
f	6	4	5	9
s	8	4	5	9
a	12	6	8	16

Partie B

1. a. 1 et 2
   b. De chaque sommet partent 3 arêtes. Donc $3s$ arêtes partent des sommets, chacune comptée 2 fois. Donc $a = 3s/2$.
   c. $2a + 4 = 2f + 2s$ donc $3s + 4 = 2f + 2s$ donc $s = 2f - 4$, puis $a = 3f - 6$.
2. a.



Chaque sommet est à l'intersection de 3 pentagones, donc départ de 3 *arêtes*.

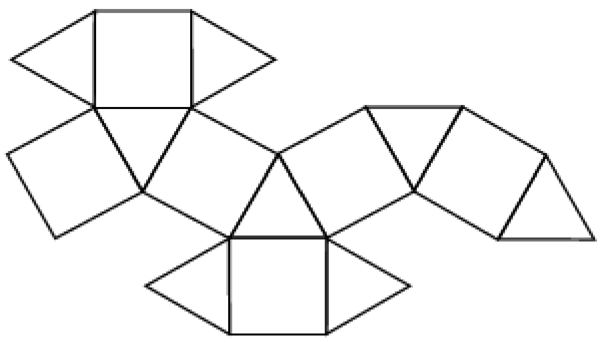
b. On a donc $2a = 3s$. De plus un pentagone ayant 5 sommets, f pentagones ont $5f$ sommets, chacun étant compté 3 fois. Donc $s = \frac{5f}{3}$.

c. On en déduit que $2f - 4 = \frac{5}{3}f$ donc $f = 12$. $(f, s, a) = (12, 20, 30)$

3. Comme précédemment le solide serait un élément de D_3 et comme les hexagones ont 6 faces on aurait $s = \frac{6}{3}f = 2f$, ce qui est impossible puisque $s = 2f-4$.

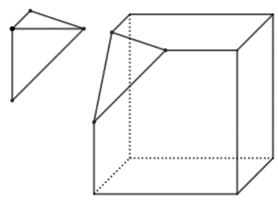
Partie C

1. De chaque sommet sont issues 4 *arêtes*. Donc $2a = 4s$ ou $a=2s$.
2. Or le cuboctaèdre a 24 *arêtes*, celles des carrés, donc $s = 12$. Comme $f+s=a+2$, on a $f = 14$ et par conséquent 8 triangles.
3. L'aire est égale à
   $$6x^2 + 8 \times \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = x^2(6 + 2\sqrt{3}).$$
4. Voici un des 6912 patrons possibles.
5. $p = \frac{6}{6 + 2\sqrt{3}}$; 0.63



Partie D

1. A chaque sommet on enlève un tétraèdre trirectangle dont un sommet est le sommet du cube considéré et les trois autres sont les milieux des trois arêtes issues de ce sommet. Le triangle « section » est évidemment équilatéral. D'autre part les 4 milieux des arêtes d'une même face forment un carré. Donc si l'on tronque de la même manière aux 8 sommets on obtient bien le cuboctaèdre avec ses 8 triangles équilatéraux (un par sommet) et ses 6 carrés (un par face).



2. Le volume du cuboctaèdre est égal au volume du cube diminué du volume des 8 tétraèdres. Si x désigne la longueur d'une *arête* du cuboctaèdre, le côté du cube est $x\sqrt{2}$. Les côtés de l'angle droit du tétraèdre ôté mesure $\frac{x\sqrt{2}}{2}$. Le volume d'un tétraèdre est donc $\dfrac{\frac{x\sqrt{2}}{2}\times\frac{x\sqrt{2}}{2}}{2}\times\dfrac{x\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{x^3\sqrt{2}}{24}$, celui du cuboctaèdre est donc égal à $(x\sqrt{2})^3-8\times\dfrac{x^3\sqrt{2}}{24}=\dfrac{5}{3}x^3\sqrt{2}$.

Exercice 3 : Les entiers 3F

A. **1**. Les suivants de 18 sont : 24, 27, 32.

2. On a $2024 = 8 \times 253 = 8 \times 11 \times 23$. Ainsi 2024 n'est pas un 3F puisque 11 est un diviseur premier de 2024.

3. Le produit de deux 3F est un 3F car si a, b, c, d sont des entiers naturels, on a $2^a 3^b \times 2^c 3^d = 2^{a+c} 3^{b+d}$ et $a + c$ et $b + d$ sont des entiers naturels.

4. La somme de deux 3F n'est pas toujours un 3F. Par exemple 2 et 3 sont des 3F mais 5=2+3 n'en est pas un.

B. **1.** Si $a \geq 11$ alors $2^a 3^b \geq 2^a \geq 2^{11} = 2048 > 2024$.

Si $b \geq 7$ alors $2^a 3^b \geq 3^b \geq 3^7 = 2187 > 2024$.

Donc si $2^a 3^b < 2024$ alors $a \leq 10$ et $b \leq 6$.

2. Exemple de programme :

```
def prog():
    N=0
    for a in range(0,11):
        for b in range(0,7):
            x=2**a*3**b
            if x<2024:
                N=max(x,N)
    print(N)
```

C. **1. a)** On a $3^4 n = 81n = 81(80q + r) = 80(80q + r) + 80q + r = 80q_1 + r$ avec $q_1 = 80q + r + q$. Comme q_1 et r sont deux entiers et $0 \leq r < 80$, r est le reste de la division euclidienne de $3^4 n$ par 80.

b) Les valeurs possibles du reste de la division de 3^n sont $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$ et $3^3 = 27$ car quand on ajoute 4 (éventuellement plusieurs fois) à l'exposant on ne modifie par le reste.

2. a) Soient Q le quotient et R le reste de la division euclidienne de 2^a par 80. On a

$$2^a = 80Q + R \text{ avec } 0 \leq R < 80$$

Donc $R = 2^a - 80Q = 16(2^{a-4} - 5Q)$ est un multiple de 16 puisque $2^{a-4} - 5Q$ est un entier car a et$Q$ sont des entiers et$a \geq 4$.

b) Les valeurs possibles de ce reste sont donc 0, 16, 32, 48 et 64 (multiples de 16 strictement inférieurs à 80).

c) Si $2^a - 1$ est un 3F, comme il est impair son seul diviseur premier ne peut être que 3 donc il existe un entier b tel que $2^a - 1 = 3^b$ soit $2^a = 3^b + 1$

Or d'après **1.** Le reste de la D.E. de $3^b + 1$ est 2, 4, 10 ou 28 et aucun de ces entiers n'est un multiple de 16 donc, d'après **2.b**, l'égalité $2^a = 3^b + 1$ est impossible.

De même, Si $2^a + 1$ est un 3F, comme il est impair son seul diviseur premier ne peut être que 3 donc il existe un entier$b$ tel que $2^a + 1 = 3^b$ soit $2^a = 3^b - 1$.

Or d'après **1.** Le reste de la D.E. de $3^b - 1$ est 0, 2, 8 ou 26 et aucun de ces entiers n'est un multiple de 16 donc, d'après **2.b**, l'égalité $2^a = 3^b - 1$ est impossible.

Ainsi $2^a - 1$ et $2^a + 1$ ne sont pas des entiers 3F.

3. Les couples d'entiers consécutifs qui sont des entiers 3F sont (1,2), (2,3), (3,4) et (8,9). En effet, si deux entiers consécutifs supérieurs ou égaux à 2 sont des 3F alors l'un d'eux est impair et c'est donc un multiple de 3. On le note n. L'autre, $n + 1$ ou $n - 1$ ne peut

pas être un multiple de 3 et comme il est 3F, c'est une puissance de 2 notée 2^a. On a alors $n = 2^a - 1$ ou $n = 2^a + 1$.
D'après **2**, on a nécessairement $a \leq 3$ donc $n \leq 2^a + 1 \leq 9$. Les solutions sont donc les couples d'entiers inférieurs ou égaux à 10 qui sont des 3F.