Mesure d’une distance focale (Focométrie)	
BTS Systèmes Photoniques 1ère année – Lycée A. Kastler (Talence)	
En optique	
Activités	**Tâches Professionnelles**
Déterminer expérimentalement les éléments cardinaux d’un système optique centré mince ou épais	Rédiger un dossier explicitant les essais, les tests, la nature des grandeurs à contrôler, les valeurs attendues avec les tolérances admises, les appareils et l’environnement logiciel utilisés.
En mathématiques	
Capacités	**Connaissances**
Déterminer les racines d’une fonction polynôme de degré 2 Etudier le signe d’une fonction polynôme de degré 2 Calculs avec des fractions. Calculer avec des puissances, des racines carrées.	Module : Fonction d’une variable réelle Fonctions polynôme de degré 2 Module : Calcul et numération AP : S’assurer d’une certaine aisance dans les calculs cycle 4

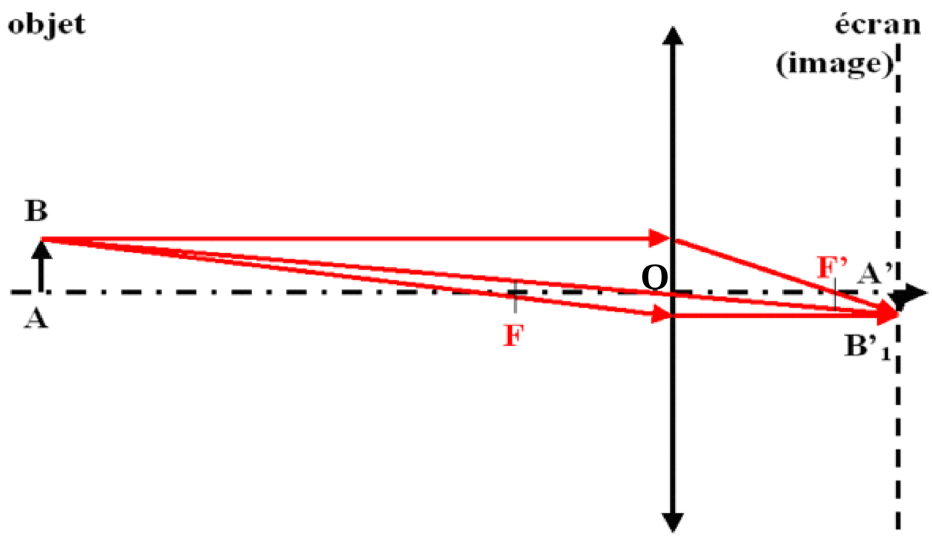
Compétences

S’informer	Chercher	Modéliser	Raisonner, argumenter	Calculer, illustrer, mettre en œuvre une stratégie	Communiquer

OBJECTIF : Réinvestir le travail sur les fonctions polynôme du second degré (racines et signe). Utiliser la relation de conjugaison des lentilles minces et comprendre le pourquoi de la condition D>4f’.

1 Méthode de Bessel

Soit une lentille convergente L de focale $f' = \overline{OF'} = 100\ mm$ permettant d’obtenir sur un écran une image réelle d’un objet réel, les 2 étant séparés d’une distance AA’ = 500 mm.



Expérimentalement, il existe 2 positions possibles de L permettant d'avoir une image nette sur l'écran (vérification expérimentale sur paillasse prof).
Les étudiants visualisent sur le banc optique les deux images en déplaçant la lentille L.
Notons $\overline{\mathrm{AA'}} = \mathrm{D}$ et $\overline{\mathrm{OA}} = \mathrm{x}$, avec O le centre optique de la lentille.
En utilisant la relation de conjugaison des lentilles minces, montrer qu'il existe une équation reliant x, D et *f'*.
Demander aux étudiants de rappeler la relation de conjugaison.
Etablir la relation souhaitée : $\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1}{D+x} - \frac{1}{x}$
Puisque $\overline{\mathrm{AA'}} = D$ et $\overline{\mathrm{OA}} = x$, alors $\overline{\mathrm{OA'}} = \overline{\mathrm{OA}} + \overline{\mathrm{AA'}} = \mathrm{D} + \mathrm{x}$
Difficulté prévisible : x est une valeur algébrique, les étudiants peuvent penser que x est une longueur. Bien que l'étude des valeurs algébriques ne soit pas au programme de mathématiques, il est important de les définir et de les travailler dans le cadre de l'AP ou du Co-enseignement.

2. RAPPEL : Résolution des équations du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{R}$:
On considère le polynôme de degré 2 : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$
Déterminer les racines de P revient à trouver les réels x tels que $P(x) = 0$.
Pour cela on peut calculer le discriminant de l'équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.
Trois cas se présentent :

- *$\Delta > 0$: P possède deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$*
- *$\Delta = 0$: P possède une racine (double) : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.*
- *$\Delta < 0$: P ne possède aucune racine dans $\mathbb{R}$.*

REMARQUE :
Si $\Delta < 0$, P possède deux racines complexes conjuguées.
Cette remarque peut être enlevée, notamment si les étudiant n'ont pas encore été sensibilisés aux nombres complexes. A rappeler que les étudiants issus des séries technologiques (STL et STI2D) ont déjà travaillé les nombres complexes en classe de 1$^{\text{ère}}$ et terminale.

EXERCICE 1 :
Résoudre, dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $x^2 + 6x - 16 = 0$
b. $-x^2 + x + 3 = 0$
c. $2x^2 + 6x + 4 = 0$

Les étudiants traitent l'exercice, il leur est demandé de ne pas utiliser le solveur de la calculatrice. Ce temps de calcul leur permet de vérifier leurs compétences en calculs (carré, opérations simples, fractions et racines carrées). Il pourra être important pour certains, dans le cadre de la différenciation, de leur faire écrire les valeurs numériques correspondants aux paramètres a, b et c.

a) $\Delta = 100$ et $x_1 = -8$; $x_2 = 2$

b) $\Delta = 13$ et $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

c) Il est intéressant de leur proposer de simplifier l'équation en divisant les deux membres de celle-ci par 2.
$\Delta = 1$ et $x_1 = -2$; $x_2 = -1$

RAPPEL : Signe d'un polynôme de degré 2 : $P(x) = ax^2 + bx + c$

Discriminant	$a > 0$		$a < 0$	
$\Delta > 0$ Supposons $x_1 < x_2$	x	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$	x	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
	Signe de $P(x)$	*+ 0 - 0 +*	*Signe de* $P(x)$	*- 0 + 0 -*
$\Delta = 0$	x	$-\infty$ x_0 $+\infty$	x	$-\infty$ x_0 $+\infty$
	Signe de $P(x)$	*+ 0 +*	*Signe de* $P(x)$	*- 0 -*
$\Delta < 0$	x	$-\infty$ $+\infty$	x	$-\infty$ $+\infty$
	Signe de $P(x)$	*+*	*Signe de* $P(x)$	*-*

<u>EXERCICE 2 :</u>

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par :
$P(x) = (m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3)$ où $m \in \mathbb{R}$.

a. Pour quelle(s) valeur(s) de m ce polynôme possède-t-il une racine double ? Calculer cette racine.
b. Pour quelle(s) valeur(s) de m ce polynôme possède-t-il deux racines distinctes ?

Cet exercice peut être compliqué pour certains, à cause de la présence du paramètre m. Dans le cadre de la différenciation des coups de pouce pourront être proposés. Comme par exemple : identifier clairement les valeurs numériques correspondant à a, b et c. Un rappel des identités remarquables $(A+B)^2$; $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$et les règles de calcul avec des puissances : $(AB)^2 = A^2B^2$ pourront aussi être proposées.

a) $\Delta = 32(m^2 - 1)$, $m = 1$ $(x_0 = -1)$ ou $m = -1$$(x_0 = 1)$.
Le rappel de la résolution d'une équation du type $x^2 = A$ a été nécessaire pour certains.
Les étudiants ont repris tous les calculs en remplaçant m par 1 puis par -1 aucun n'a eu l'idée de remplacer m directement dans l'expression de la racine double.

b) $\Delta = 32(m-1)(m+1)$ donc $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.
Des étudiants n'ont pas vu la factorisation immédiate du discriminant. L'utilisation du symbole d'union n'est pas acquise par tous.

Dans le cadre de la gestion de l'hétérogénéité, un complément sur les résolutions d'équations à paramètres a été proposé à certains étudiants, en approfondissement en AP.

3. Application à la méthode de Bessel

3.1. Montrer que l'équation trouvée dans le paragraphe 1 peut se ramener à une équation dite du second degré.

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{D+x} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 + xD + Df' = 0$$

La manipulation des fractions et la mise sous le même dénominateur n'est pas une évidence pour tous.

3.2. À l'aide de la méthode mathématique décrite ci-dessus, déterminer la condition reliant D et *f'* pour qu'il existe deux solutions réelles à l'équation précédente du 2nd ordre.

$$\Delta = D^2 - 4Df = D(D - 4f')$$

Comme $D > 0$, la condition nécessaire pour l'existence des deux solutions est :
$D - 4f' > 0,\ soit\ D > 4f'$.
On fait alors le lien avec la condition : la distance entre l'objet et l'écran doit être supérieure strictement à quatre fois la distance focale de la lentille.

3.3. Notons $\overline{O_1O_2} = d$ avec O_1 et O_2 les centres optiques de la lentille lorsque l'image est nette sur l'écran. En continuant la résolution de l'équation du 2nd ordre, déterminer la relation donnant *f'* en fonction de D et d.

$x_1 = \frac{-D-\sqrt{D^2-4Df'}}{2}$ et $x_2 = \frac{-D+\sqrt{D^2-4Df'}}{2}$ donc $\overline{O_1O_2} = d = x_2 - x_1 = \sqrt{D^2 - 4Df'}$

D'où $d^2 = D^2 - 4Df' \Leftrightarrow \frac{D^2-d^2}{4D} = f'$

En déduire un protocole pour déterminer la focale d'une lentille convergente.
Placer la lentille dans chacune des deux positions où l'image est réelle sur l'écran.
Noter les positions respectives O_1 et O_2 de la lentille. En déduire *d*.
Mesurer la distance D objet-écran.
Appliquer la relation $f' = \frac{D^2-d^2}{4D}$ pour trouver *f'*.