Exercice académique 1 :Des cercles sur un réseau triangulaire

1.a. $N(7,12) = 49 - 84 + 144 = 109$.
1.b. $N(a,12) = a^2 - 12a + 144 = 109$ équivaut à $a^2 - 12a + 35 = 0$ qui s'écrit $(a-6)^2 = 1$, ce qui donne $a - 6 = 1$ ou $a - 6 = -1$, soit $a = 7$ ou $a = 5$. Ainsi $N(5,12) = 109$.
1.c. $N(2,3) = 7$ donc $(2,3)$ est un représentant de 7.

2. $N(b,a) = b^2 - ba + a^2 = a^2 - ab + b^2 = N(a,b)$
et $N(-a,-b) = (-a)^2 - (-a)(-b) + (-b)^2 = a^2 - ab + b^2 = N(a,b)$.

3.a. $N(ka,kb) = (ka)^2 - (ka)(kb) + (kb)^2 = k^2a^2 - k^2ab + k^2b^2 = k^2(a^2 - ab + b^2) = k^2N(a,b)$.
3.b. $N(2,3) = 7$ donc $N(17 \times 2, 17 \times 3) = 17^2 \times 7$ d'où $N(34,51) = 2023$.

4. $N \times M = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4 = N(a^2, -b^2)$.
$(a^2, -b^2)$ est un représentant de $N \times M$.

5.a. Si a et b sont pairs, a^2, ab et b^2 sont des multiples de 4 donc $N(a,b)$ est un multiple de 4.
5.b. Si a est pair et b est impair, a^2 et ab sont pairs et b^2 est impair donc $N(a,b)$ est impair. Il en est de même si a est impair et b est pair car $N(a,b) = N(b,a)$.
5.c. 2022 n'a pas de représentant car 2022 est pair et n'est pas un multiple de 4.

6.a. $N(b-a,b) = (b-a)^2 - (b-a)b + b^2 = b^2 - 2ab + a^2 - b^2 + ab + b^2 = a^2 - ab + b^2 = N(a,b)$.
6.b. Compte tenu de 3.b, 2 et 6.a, $(34,51)$, $(51,34)$, $(-34,-51)$, $(-51,-34)$, $(17,51)$, $(51,17)$, $(-17,-51)$ et $(-51,-17)$ sont des représentants de 2023.
6.c. Il existe deux entiers relatifs x et y, tels que $N = N(x,y) = N(y,x) = N(-x,-y) = N(-y,-x)$.
L'un des couples (x,y), (y,x), $(-x,-y)$, $(-y,-x)$ est tel que la deuxième coordonnées est supérieure ou égale x, $y, -x, -y$. En notant (a_1, b) ce couple, on a $N = N(a_1, b)$ avec $a_1 \leq b$ et $b \geq 0$.
En posant $a = b_1 - a_1$, on a $N = N(a,b)$ avec $0 \leq a \leq b$.
6.d. En effet, si a et b sont impairs, on remplace a par $b - a$ qui est pair.

7.a. $4N - 3b^2 = 4a^2 - 4ab + b^2 = (2a-b)^2 \geq 0$ donc $4N \geq 3b^2$.
$4N - 4b^2 = 4a^2 - 4ab = 4a(a-b) \leq 0$ car $a \geq 0$ et $a - b \leq 0$. Donc $4N \leq 4b^2$.

7.b. N est positif car $4N \geq 3b^2 \geq 0$. On a aussi $4N \geq 3b^2$ donc $b^2 \leq 4\frac{N}{3}$ d'où $b \leq 2\sqrt{\frac{N}{3}}$.

Et $4N \leq 4b^2$ donc $b^2 \geq N$ d'où $b \geq \sqrt{N}$. D'où l'encadrement $\sqrt{N} \leq b \leq 2\sqrt{\frac{N}{3}}$.
7.c On cherche a et b tels que $0 \leq a \leq b$ et $N(a,b) = 849$.
On a alors $\sqrt{849} \leq b \leq 2\sqrt{\frac{849}{3}}$ donc $30 \leq b \leq 33$ car b est un entier.
Pour $b = 30$, $N(a,b) = 849$ s'écrit $a^2 - 30a + 51 = 0$, équation qui n'a pas de solution entière.
Pour $b = 31$, $N(a,b) = 849$ s'écrit $a^2 - 31a + 112 = 0$, équation qui n'a pas de solution entière.
Pour $b = 32$, $N(a,b) = 849$ s'écrit $a^2 - 32a + 175 = 0$. On a $\Delta = 324 = 18^2$ donc $a = 7$ ou $a = 25$.
$(7,32)$ est donc un représentant de 849.

8. Si $a = 3q + r$ et $b = 3q' + r'$ où $0 \leq r \leq 2$ et $0 \leq r' \leq 2$, on a

$$N(a,b) = 9q^2 + 18qr + r^2 - 9qq' - 3qr' - 3q'r - rr' + 9q'^2 + 18q'r' + r'^2 = 3Q + N(r,r')$$

Donc $N(a,b)$ et $N(r,r')$ ont le même reste R dans la division par 3.
Lorsque r et r' prennent les valeurs 0, 1, 2, $N(r,r')$ prend les valeurs 0, 1,4 donc $R = 0$ ou $R = 1$.
Si on prend 3 entiers consécutifs, l'un d'eux a pour reste 2 dans la division par 3. Il n'appartient donc pas à E.

Exercice académique 2 : Nombres de SMITH

1) a) 121 n'est pas premier car 121 = 11 x 11.
$S(121) = 1 + 2 + 1 = 4$. On a 121 = 11 x 11 donc $S_p(121) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.
166 n'est pas premier car 166 = 2 x 83.
$S(166) = 1 + 6 + 6 = 13$. On a 166 = 2 x 83 donc $S_p(166) = 1 + 8 + 3 = 13$.
Donc 121 et 166 sont bien des nombres de Smith.

b) Pour 2023 : $S(2023) = 2 + 0 + 2 + 3 = 7$. Et 2023 = 7 x 17 x 17 donc $S_p(2023) = 7 + 1 + 7 + 1 + 7 = 23$. 2023 n'est pas un nombre de Smith.

2) a) Si N est un nombre de Smith, on a $S(N) = S_p(N)$.
On a alors $S(10N) = S(N)$ puisqu'on ne rajoute qu'un 0 à la somme des chiffres.
Par contre, $S_p(10N)$ consiste à multiplier la décomposition en facteurs premiers de N par 2 et 5. Cela signifie que $S_p(10N) = S(N) + 2 + 5 = S(N) +7$.
Donc $S(10N)$ n'est pas un nombre de Smith.

b) $S(69) = 6 + 9 = 15$ et 69 = 3 x 23 d'où $S_p(69) = 3 + 2 + 3 = 8$. Donc 69 n'est pas un nombre de Smith.
En multipliant 69 par 10, on a, selon ce qu'on a vu en 2a) : $S(690) = S(69) = 15$.
Et $S_p(690) = S_p(69) + 7 = 8 + 7 = 15$.
690 n'est pas un nombre premier car 690 = 23 x 2 x 3 x 5.
Donc 690 est bien un nombre de Smith.

c) A chaque fois qu'on multiplie un nombre par 10, on ajoute 7 à S_p.
Si $S(N) > S_p(N)$, N n'est pas un nombre de Smith.
Notons k = $\frac{(S(N) - S_p(N))}{7}$ (qui est un entier naturel positif non nul, puisque $S(N) - S_p(N)$ est positif et divisible par 7).
On a alors $S(10^kN) = S(N)$ et $S_p(10^kN) = S_p(N) + 7k$.
Donc $S_p(10^kN) = S_p(N) \text{ x } 7\frac{(S(N) - S_p(N))}{7} = S_p(N) + S(N) - S_p(N) = S(N) = S(10^kN)$.
Donc 10^kN est bien un nombre de Smith.

3) On écrit les décompositions en nombres premiers de m et n.
$m = p_1\, p_2 \,\ldots\ldots\ldots\, p_s$
$n = p'_1\, p'_2 \,\ldots\ldots\ldots\, p_{s'}$
où $p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots\, p_s,\ p'_1, p'_2 \,\ldots\ldots\ldots\, p'_s$ sont tous des nombres premiers (possiblement non distincts).
Donc par unicité de la décomposition en nombres premiers :
$mn = p_1\, p_2 \,\ldots\ldots\ldots\, p_s\, p'_1\, p'_2 \,\ldots\ldots\ldots\, p'_s$.
La somme des chiffres de $S_p(mn)$ est donc bien la somme des chiffres des facteurs premiers de m et des chiffres des facteurs premiers de n.

4) a) $S(R_n) = n$ et $S_p(R_n) = n$ (puisque R_n est premier).
On a clairement $S(2R_n) = 2n$, puis $S_p(2R_n) = S_p(R_n) + S_p(2) = n + 2$.

b) On vérifie d'abord que $S(2R_n)> S_p(R_n)$.
C'est-à-dire $2n > n +2$, donc $n>2$, ce que nous avons par hypothèse.
Puis, comme r = 2, on peut écrire n = 7q + 2 où q est un entier positif.
On a alors $2n - (n+2) = n - 2 = 7q + 2 - 2 = 7q$, donc $S_p(2R_n) - S_p(R_n)$ est divisible par 7.
D'après la question 2c), cela signifie qu'il existe bien un nombre naturel k tel que $10^k \text{ x } 2R_n$ soit un nombre de Smith. Ce nombre est bien divisible par 10.
Remarque : Wayland et Oltikar ont ainsi trouvé que $10^{45} \text{ x } 2R_{317}$ est un nombre de Smith !

5) a) $S(mR_n) - S_p(mR_n) = S(mR_n) - S_p(m)S_p(R_n)$

On va d'abord chercher dans les cas les plus simples, où m est inférieur à 10.

On a alors $S(mR_n) = mn$ et $S_p(m)S_p(R_n) = S_p(m) + n$.

Or $r = 0$ donc on peut écrire $n = 7q$ avec q un entier naturel.
Donc $S(mR_n) – S_p(mR_n) = 7mq – S_p(m) – 7q = 7q (m – 1) – S_p(m)$.
Il suffit alors de prendre $S_p(m) = 7$ pour avoir $S(mR_n) – S_p(mR_n)$ multiple de 7.
Donc on peut choisir $m = 7$.

b) On écrit $n = 7q + r$, avec q un entier naturel positif et $0 \le r < 7$.
D'où $S(mR_n) – S_p(mR_n) = (7q+r)m – S_p(m) – (7q+r)$.
$= 7qm – 7q + rm - S_p(m) – r$.
$= 7q (m – 1) + r(m-1) - S_p(m)$.

On doit donc essayer d'avoir $r(m-1) - S_p(m)$ nul ou un multiple de 7.

Pour $r = 1$: $r(m-1) - S_p(m) = m - 1 – S_p(m)$.
Si m était un nombre premier, on aurait $S_p(m) = m$, donc $r(m-1) - S_p(m) = -1$. Cela ne conviendrait pas.
Par contre en choisissant $m = 6$, on a $S_p(6) = 5$ (puisque $6 = 2 \times 3$), on a bien $r(m-1) - S_p(m) = 6 – 1 – 5 = 0$.

Pour $r = 2$: $r(m-1) - S_p(m) = 2m - 2 – S_p(m)$. Pour $m = 2$, $S_p(m) = 2$, et on a bien $2m – 2 – S_p(m) = 2 \times 2 – 2 – 2 = 0$.

Pour $r = 3$: $r(m-1) - S_p(m) = 3m – 3 – S_p(m)$. Pour $m = 5$, $S_p(m) = 5$, et on a bien $3m – 3 – S_p(m) = 3 \times 5 – 3 – 5 = 7$.

Pour $r = 4$: $r(m-1) - S_p(m) = 4m – 4 – S_p(m)$.
Si m était un nombre premier, on aurait $S_p(m) = m$, donc $r(m-1) - S_p(m) = 3m – 4$.
Aucune valeur de m première ne permet d'obtenir un multiple de 7.
Ce n'est pas non plus possible pour toute autre valeur de m inférieure à 10.
On revient donc à la formule : $S(mR_n) – S_p(mR_n) = S(mRn) – S_p(m)S_p(Rn)$.
On trouve en cherchant (un peu…) que pour $m = 14$, on a $S(14Rn) = 5n$, puis $S_p(m)S_p(Rn) = S_p(14) + n = 9 + n$.
Soit $S(mR_n) – S_p(mR_n) = 5n – 9 - n = 4n – 9 = 4(7q + 4) - 9 = 28 q – 7 = 7(4q – 1)$ qui est bien un multiple de 7.

Pour $r = 5$: $r(m-1) - S_p(m) = 4S_p(m) – 5$. Pour $m = 3$, $S_p(3) = 3$, et on a bien $4m – 5 = 4 \times 3 – 5 = 7$.

Pour $r = 6$: $r(m-1) - S_p(m) = 5S_p(m) – 6$. Pour $m = 4$, $S_p(4) = 4$, et on a bien $5m – 6 = 5 \times 4 – 6 = 14$.

c) On a montré pour toute valeur de r, et donc de n, $S(mR_n) – S_p(mR_n)$ est un multiple de 7 donc d'après 2), il existe un multiple de R_n (premier), divisible par 10, qui soit un nombre de Smith.

6) a) On suppose R_n premier.
On a $S_p(3304R_n) = S_p(3304) + S_p(R_n)$.
Or $3304 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 59$.
$2 + 2 + 2 + 7 + 5 + 9 = 27$.
Donc $S_p(3304R_n) = n + 27$.
Donc $S_p(3304R_{19}) = 46$.

Écrivons la suite des nombres des $3304R_n$ (premiers ou non).
$3304R_2 = 36344$
$3304R_3 = 366744$.
$3304R_4 = 3670744$.
$3304R_5 = 36710744$
$3304R_6 = 367110744$
…
…
$3304R_n = 367111……1110744$ ($n – 4$ « 1 » contenus dans le nombre).

Cela correspond à ajouter 1 en passant de $S(3304R_n)$ à $S(3304R_{n+1})$ (il faudrait le démontrer rigoureusement).
On en déduit que pour passer de $S(3304R_n)$ à $S(3304R_m)$, on ajoute m - n c'est-à-dire
$S(3304R_m) = S(3304R_n) + m - n$ (*).

En voyant que S(3304 x 1111) = 31, on a alors $S(3304R_{19}) = S(3304R_4) + 19 - 4 = 31 + 15 = 46$.

Donc $S(3304R_{19}) = S_p(3304\ R_{19})$: $3304R_{19}$ est bien un nombre de Smith.

b) Supposons alors que $3304R_n$ est un nombre de Smith (ce qui est le cas pour n = 19).
On a alors: $S_p(3304R_m) = m + 27 = m - n + n + 27 = m - n + Sp(3304R_n)$
$= m - n + S(3304R_n)$ (puisque $3304R_n$ est un nombre de Smith).
$= S(3304R_m)$ (d'après la relation (*) trouvée précédemment).
R_m est donc bien un nombre de Smith.

On montre alors bien qu'en passant d'un R_n premier à un autre R_m premier, et en ayant supposé que $3304R_n$ est un nombre de Smith, on a un autre nombre de Smith avec $3304R_m$. En ayant montré initialement que $3304R_{19}$ est un nombre de Smith, on déduit que tous les autres $3304R_n$, avec R_n premier, sont aussi des nombres de Smith.

Exercice académique 3 Les déplacements du robot

1.a. Avec$(1, 3)$, $S = 4$ et les cases atteignables sont 1, $2 = 3 - 1$, 3, $4 = 1 + 3$ donc (1,3) est efficace.
Avec$(1, 3, 5)$, $S = 9$ et les cases atteignables sont $1, 2 = 3 - 1, 3, 4 = 1 + 3, 5, 6 = 1 + 5$,$7 = 3 + 5 - 1$, $8 = 3 + 5, 9 = 1 + 3 + 5$ donc $(1, 3, 5)$ est efficace.
Avec $(2, 3, 4)$, 8 n'est pas atteignable donc $(2, 3, 4)$ n'est pas efficace.
1.b. $(1, 2, 4, 7)$ est efficace car $S = 14$ et les numéros des cases atteignables sont $1, 2, 3 = 1 + 2, 4, 5 = 1 + 4$, $6 = 2 + 4, 7 = 1 + 2 + 4$ puis $8, 9$, 10 , 11 , 12 , $13, 14$ en ajoutant 7 aux précédents.
2.a Avec $(1, 2, a)$, les numéros des cases atteignables sont $1, 2, 3, a - 3, a - 2, a - 1, a, a + 1$, $a + 2$, $a + 3$.
2.b. Comme $S = a + 3$, le plus grand entier a qui convient est tel que $a - 3 = 4$ soit $a = 7$.
2.c. Avec $(1, 2, 7, b)$ on a $S = b + 10$.
$(1, 2, 7)$ ne permet d'atteindre que les numéros 1 à 10 et avec $b \geq 11$, les cases atteignables sont $b - 10$, $b - 9, \dots, b + 10$. Le plus grand b qui convient est tel que $b - 10 = 11$ soit $b = 21$.
3.a. Oui, $(1, 2, 4, 8, 16)$ est efficace : on peut atteindre tous les numéros de 1 à 31.
3.b. $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)$ est efficace. En ajoutant 32, on atteint tous les numéros de 32 à 63 puis en ajoutant 64 , on atteint les numéros de 64 à $127 = S$.
3.c. $(1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^{k-1})$ est une liste efficace de k nombres entiers.
4.a. L permet au robot d'atteindre toutes les cases dont le numéro n est compris, au sens large, entre 1 et S.
En se déplaçant ensuite de $2S + 1$, il peut donc atteindre la case $n + 2S + 1$. Toutes les cases numérotées de $2S + 1$ à $3S + 1$ (somme des termes de L') sont donc atteignables.
En se déplaçant d'abord à la case 2S+1 puis en effectuant dans le sens contraire tous les déplacements effectués pour atteindre la case n, le robot atteint la case $2S + 1 - n$. Les numéros de toutes les cases de $S + 1$ à $2S$ peuvent s'écrire sous la forme $2S + 1 - n$ avec $1 \leq n \leq S$ donc ces cases sont atteignables.
Finalement L' est une liste efficace.
4.b. En commençant par la liste (1) qui est efficace et en appliquant 4.a. , on obtient successivement les listes $(1, 3)$, $(1, 3, 9)$, $(1, 3, 9, 27)$, $(1, 3, 9, 27, 81)$, $(1, 3, 9, 27, 81, 243)$, $(1, 3, 9, 27, 81, 243, 729)$, $(1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187)$ qui sont toutes efficaces.
La dernière comporte huit entiers et permet au robot d'atteindre toutes les cases numérotées de 1 à 2023.
5.a. Tout entier N compris 1 et S est atteignable.
Pour chaque i compris entre 1 et k, si on a effectué un déplacement de a_i cases vers la droite, on pose $\alpha_i = +1$, si on a effectué ce déplacement vers la gauche, on pose $\alpha_i = -1$ et si on n'a pas utilisé le déplacement de a_i cases, on pose $\alpha_i = 0$.
On a alors : $N = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$.
5.b. On a 3^k choix possibles de $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$.
Si les α_i sont tous nuls, $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = 0$ qui n'est pas le numéro d'une ace atteignable.
Si l'un au moins des α_i n'est pas nul, les deux nombres $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$ et $(-\alpha_1) a_1 + (-\alpha_2) a_2 + \cdots + (-\alpha_k) a_k$ sont opposés et un seul d'entre eux correspond à une case atteignable.
Le nombre de cases atteignables est donc inférieur ou égal à $\frac{3^k - 1}{2}$.
6. Si toutes les cases de 1 à 2023 sont atteignables, $2023 \leq S$ donc $2023 \leq \frac{3^k - 1}{2}$ d'où $3^k \geq 4047$. On en déduit que $k \geq 8$. D'après 4.b., on peut conclure que le plus petit entier k qui convient est 8.