MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

EPREUVE NATIONALE

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Étiquetage gracieux d'une figure

On considère un ensemble fini de points. On relie certains de ces points par des segments. L'ensemble ainsi constitué est appelé *figure.*
On effectue l'*étiquetage* d'une *figure* comportant n segments en associant à chaque point un entier compris entre 0 et n, ces entiers étant distincts deux à deux.
On attribue à chaque segment la valeur absolue de la différence des entiers associés à ses extrémités. Cet entier est appelé *pondération* du segment.
On dit que l'*étiquetage* de la figure est *gracieux* si les n pondérations obtenues sur les segments sont exactement tous les entiers de 1 à n.
On donne ci-dessous un exemple d'*étiquetage gracieux* d'une figure comportant 6 points et 7 segments :

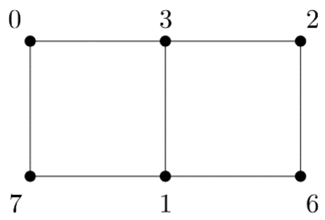


Figure étiquetée

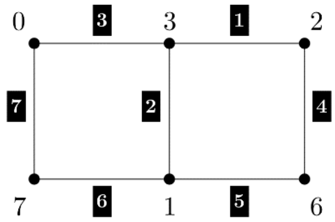
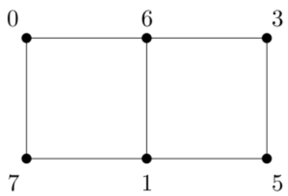
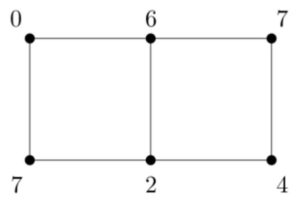


Figure étiquetée avec indication des pondérations

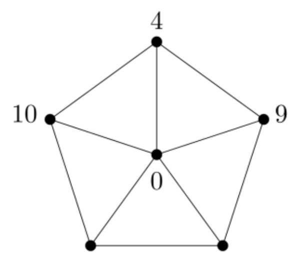
A. Des exemples

1. Pour chacune des figures ci-contre, préciser si l'étiquetage proposé est un étiquetage gracieux.





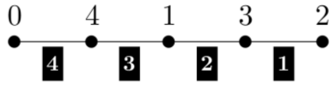
2. Compléter l'étiquetage de la figure ci-contre pour obtenir un étiquetage gracieux.



B. Cas des lignes

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la figure L_n constituée de $n+1$ points alignés et des n segments joignant des points voisins.

On propose ci-contre l'étiquetage gracieux des points de la figure L_4.



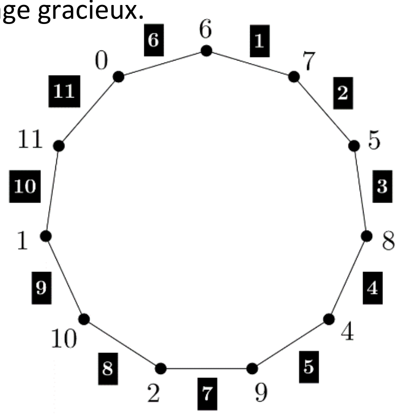
1. Montrer qu'on peut trouver un étiquetage gracieux pour chacune des figures L_5, L_6 et L_7.

2. On admet qu'on peut trouver un étiquetage gracieux pour la figure L_{2022} tel que le point le plus à gauche soit étiqueté avec 0. Décrire cet étiquetage.

C. Cas des polygones

1. Montrer que tout triangle et tout quadrilatère peut être muni d'un étiquetage gracieux.

2. On a représenté ci-contre un polygone à 11 côtés muni d'un étiquetage gracieux.
En déduire un étiquetage gracieux pour un polygone à 12 côtés.



3. Déterminer la parité de la pondération d'un segment lorsque les étiquettes de ses extrémités sont :

- **a.** de parités différentes ;
- **b.** de même parité.

4. En déduire qu'on ne peut pas trouver un étiquetage gracieux pour les pentagones.

D. Une très grande figure

On note K_{2022} la figure constituée de 2022 points telle que tout couple de points est relié par un unique segment.

1. Montrer que K_{2022} est constituée de 2 043 231 segments.

2. On suppose qu'il existe d'un étiquetage gracieux de K_{2022}.

- **a.** Quel est le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair ?
- **b.** On note p le nombre de points étiquetés avec un nombre pair. Exprimer en fonction de p le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair.

3. Montrer finalement que K_{2022} ne peut pas être muni d'un étiquetage gracieux.

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Nombres sectionnables

Partie A

On dit qu'un nombre entier est *sectionnable unitaire* s'il est supérieur ou égal à 3 et s'il peut s'écrire sous la forme : $1+2+3+\cdots+p$ où p est un entier supérieur ou égal à 2.
Par exemple, 3 et 10 sont des nombres sectionnables unitaires car $3 = 1 + 2$ et $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.
On rappelle que pour tout entier naturel n non nul : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

1. **a.** Montrer que 21 et 136 sont sectionnables unitaires.
b. Est-ce que 1850 est sectionnable unitaire ?

2. Soit a un entier supérieur ou égal à 3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que a soit un entier sectionnable unitaire.

Partie B

On dit qu'un nombre entier est *sectionnable* s'il peut s'écrire comme la somme d'au moins deux nombres entiers strictement positifs consécutifs.

Par exemple, 24 et 25 sont sectionnables car $24 = 7 + 8 + 9$ et $25 = 12 + 13$.
En revanche, 4 n'est pas sectionnable car $1+2<4<1+2+3$ et $2+3>4$.

1. Justifier que 9 et 15 sont sectionnables mais que 16 ne l'est pas.

2. Démontrer que si un entier est impair et supérieur ou égal à 3, alors il est sectionnable.

3. Soit k et q des entiers naturels avec $k \geqslant 2$. On pose $S=(q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$.
Montrer que $2S = k(k+1+2q)$.

4. Montrer qu'une puissance de 2 n'est pas sectionnable.

5. On s'intéresse aux entiers strictement positifs pairs qui ne sont pas des puissances de 2.
Soit n un tel entier. On admet qu'il existe un unique couple d'entiers (r,m) où m est un entier impair supérieur ou égal à 3 et r un entier supérieur ou égal à 1, tel que $n=2^r\times m$.

- **a.** Déterminer r et m quand $n=56$. En déduire que 56 est sectionnable et l'écrire comme somme d'entiers consécutifs.
- **b.** Montrer que 44 est sectionnable.
- **c.** Montrer que tout nombre entier positif pair qui n'est pas une puissance de 2 est sectionnable.

6. Déduire de ce qui précède l'ensemble des nombres sectionnables.

Partie C

On dit qu'un nombre entier est *uniquement sectionnable* lorsqu'il peut s'écrire de façon unique comme somme d'au moins deux nombres entiers strictement positifs consécutifs.

1. Montrer que le nombre 13 est uniquement sectionnable. Le nombre 25 est-il uniquement sectionnable ?

2. **a.** Soit un entier n qui est la somme de k entiers strictement positifs consécutifs, avec $k \geqslant 3$.
On peut donc écrire n sous la forme $n=(q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$, avec q entier positif ou nul.
Montrer que n n'est pas un nombre premier.

b. En déduire que tout nombre premier supérieur ou égal à 3 est uniquement sectionnable.

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Trois

Le protocole suivant permet de construire une suite d'entiers naturels.

Le premier terme de la suite est 4.
Pour passer d'un nombre au suivant, on réalise au choix une des opérations suivantes :

- multiplier le nombre par 3 ;
- multiplier le nombre par 3 puis ajouter 2 ;
- si le nombre est pair, le diviser par 2.

Si une des suites construites de cette façon a pour terme un certain nombre N, on dira que N est *atteignable*.
Par exemple, le nombre 11 est atteignable : on part de 4, on multiplie par 3 pour obtenir 12, on divise deux fois successivement par 2 pour obtenir 3, qu'on multiplie par 3 avant d'ajouter 2.

1. Montrer que tous les entiers naturels compris entre 1 et 12 sont atteignables.

2. Montrer que $2\ 022$ est atteignable.

3. On suppose qu'il existe des entiers non atteignables. On note m le plus petit d'entre eux.

a. Montrer que m n'est pas un multiple de 3.
b. Montrer que $m-2$ n'est pas un multiple de 3.
c. Montrer que $m-1$ n'est pas non plus un multiple de 3.
d. Conclure.

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

EPREUVE ACADEMIQUE

Cette deuxième partie est constituée des exercices académiques. À son issue, les copies sont ramassées.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. **Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition**.

Cette deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Jeu de chaises

Dix personnes portent un dossard numéroté de 1 à 10, chacune ayant un numéro différent.

De la même façon dix chaises ont un dossier numéroté de 1 à 10, chacune ayant un numéro différent.

Au départ chaque personne est assise sur la chaise portant le même numéro qu'elle.

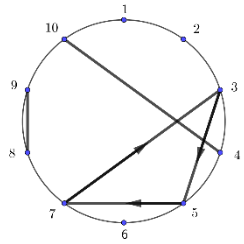
Sur chacune des chaises se trouve une enveloppe dans laquelle est indiqué un entier compris entre 1 et 10. Ces entiers sont tous différents et les enveloppes ont été réparties au hasard.

Au coup de gong, chaque personne ouvre l'enveloppe située sur sa chaise, regarde le nombre inscrit, repose l'enveloppe sur la chaise et se déplace jusqu'à celle qui porte sur son dossier le numéro qu'elle vient de lire dans l'enveloppe.

Voici un exemple de répartition $s:\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\1&2&5&10&7&6&3&9&8&4\end{pmatrix}$ qui signifie que l'enveloppe située sur la chaise 1 contient le numéro 1, celle située sur la chaise 5 contient le numéro 7 …

Ceci constitue la **forme 1** de la répartition *s* que l'on peut représenter également ainsi :

forme 2 :



sur laquelle on trouve $\begin{cases}\text{. trois points fixes: 1,2 et 6}\\ \text{. deux clignotants :(4,10) et (8,9) .}\\ \text{. un cycle de longueur 3 :(3,5,7)}\end{cases}$

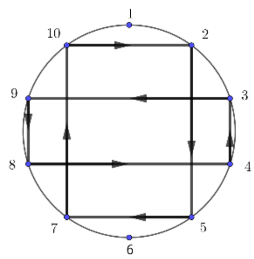
Remarque : Les flèches sont nécessaires pour le cycle alors qu'elles ne le sont pas pour les clignotants.

Ceci peut se résumer ainsi et constituer la **forme 3** de *s* : (1)(2) (6) (4,10) (8,9) (3,5,7).

Remarque $(3,5,7)=(5,7,3)$ mais $(3,5,7)\neq(3,7,5)$.

1. **a.** Donner les formes 2 et 3 pour la répartition
   $s_1:\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\2&3&5&6&7&10&1&9&4&8\end{pmatrix}$

   b. Donner les formes 1 et 3 pour la répartition

   s_2 :

   c. Donner les formes 1 et 2 pour la répartition s_3 : (1,3,5,7,9,2,4,6,8,10) formée d'un seul cycle.

2. **a.** Quel est le nombre de répartitions possibles des enveloppes sur les chaises ?

   b. Quelle est la probabilité que la répartition des enveloppes sur les chaises soit formée d'un seul cycle ?

3. Au deuxième coup de gong, les personnes regardent à nouveau le numéro inscrit dans l'enveloppe située sur la chaise où ils sont arrivés et se dirigent vers celle portant le numéro indiqué…et ainsi de suite à chaque nouveau coup de gong. Si *s* désigne la répartition initiale, on notera s^2, s^3,…,les répartitions des personnes obtenues après le $2^{\text{ème}}$, le $3^{\text{ème}}$, …coup de gong.

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

$$\begin{array}{c} \\ s \\ s^2 \\ s^3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 10 & 7 & 6 & 3 & 9 & 8 & 4 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

b. Justifier qu'il existe un entier p tel que la répartition s^p corresponde à ce que chaque individu se trouve sur la chaise portant le même numéro que lui (retour à la case départ).

c. Déterminer une répartition telle que s^{30} soit le premier retour à la case départ. On donnera la répartition sous la forme 3.

4. $E = \{1, 2, ..., n\}$. On appelle dérangement de E une répartition s des éléments de E n'ayant aucun point fixe et on note u_n le nombre de dérangements de E.

a. Déterminer u_2, puis montrer que $u_3 = 2$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 4 et soit s un dérangement de E. $s : \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$

b. Justifier que a_1 est différent de 1.

c. Montrer que le nombre de dérangements de E tels que $a_1 = 2$ et $a_2 = 1$ est égal à u_{n-2}.

d. Déterminer le nombre de dérangements de E tels que $a_1 = 2$ et $a_2 \neq 1$.

e. Justifier que si $n \geq 4$, $u_n = (n-1)(u_{n-1} + u_{n-2})$ et calculer u_{10}.

Quelle est à 0.01 près la probabilité qu'après le premier coup de gong, aucune personne ne se retrouve sur la chaise portant le même numéro qu'elle ?

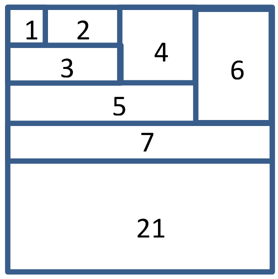
Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Partage d'un carré

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on désigne par K_n un carré de côté n.

Si k est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on dira que K_n est k-décomposable si on peut partager le carré K_n en k rectangles à côtés entiers dont les aires sont toutes différentes. On notera a_1, a_2, …a_k la liste strictement croissante des aires des rectangles d'un partage du carré K_n en k rectangles d'aires toutes distinctes.

Par exemple, le partage ci-contre montre que le carré K_7 est 8-décomposable.



1. Vérifier que K_3, K_4 et K_5 sont 3-décomposables. On donnera des partages correspondants.
   Pour $n \geq 3$, K_n est-il 3-décomposable ?

2. Justifier que K_4 est 4-décomposable et K_5 est 5-décomposable.
   Démontrer que pour tout entier $n \geq 3$, K_n est n-décomposable. On pourra étudier séparément le cas où n est impair et celui où n est pair.

3. Soient n et k deux entiers naturels tels que K_n est k-décomposable.
   - **a.** Justifier que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq \frac{k(k+1)}{2}$.
   - **b.** En déduire que $k(k+1) \leq 2n^2$.

4. Soit k un entier tel que K_6 est k-décomposable.
   - **a.** Démontrer que $k \leq 8$.
   - **b.** Justifier que les entiers a_1, a_2, …a_k sont tous différents de 7, 11 et 13. En déduire que $k \leq 7$.
   - **c.** On suppose que $k = 7$.
     Démontrer que $a_1 = 1$ et $a_7 \leq 15$.

     Déterminer toutes les listes a_1, a_2, …a_7 possibles et pour chacune d'entre elles, donner une décomposition correspondante de K_6.
   - **d.** Quel est le plus grand entier k tel que K_6 est k-décomposable ?

5. Quel est le plus petit entier n tel que K_n est 10-décomposable ?

Quel est le plus grand entier k tel que K_8 est k-décomposable et chacune des aires a_1, a_2, …a_k est un entier pair ?

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l’enseignement de spécialité de la voie générale)

Cryptarithme

On appelle cryptarithme (ou cryptogramme) une opération mathématique dans laquelle certains chiffres (pas forcément tous) ont été remplacés par des lettres. Deux lettres différentes sont codées par deux chiffres différents (et réciproquement). Un nombre ne peut évidemment pas commencer par zéro.

Nous utiliserons les conventions d’écriture suivantes :

- Une écriture décimale comportant au moins deux symboles dont au moins une lettre est surlignée : ainsi $\overline{A3B}$ désigne le nombre dont A est le chiffre des centaines, 3 celui des dizaines, B celui des unités.
- Afin d’éviter toute confusion, les produits sont toujours désignés par le symbole $\times$: on peut ainsi distinguer nettement $\overline{3A}$ de $3 \times A$.

Exemple : $\overline{AB5B}$ représente un nombre de 4 chiffres qui peut valoir 1252 ou 3858 ou 5454 etc. Il ne peut pas valoir 9357 car dans ce cas B vaudrait 3 et 7.

Résoudre un cryptarithme revient à déterminer les différentes valeurs possibles pour chaque lettre utilisée permettant de vérifier l’égalité proposée.

1. Déterminer une valeur pour A, B et C telles que : $24\times \overline{AA} = \overline{BAC}$
2. Plusieurs solutions possibles :
   - **a.** Trouver une solution pour $\overline{LUI} + \overline{LUI} = \overline{EUX}$
   - **b.** Trouver la plus petite et la plus grande valeur pour $\overline{EUX}$ vérifiant le cryptarithme précédent.

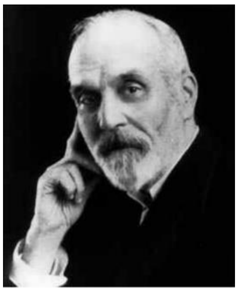
3. *La revue belge* **Sphinx***, entièrement consacrée aux récréations mathématiques et logiques, fut fondée en 1931 par Maurice Kraitchik, spécialiste notoire de théorie des nombres. Cette revue connut un certain succès international jusqu’en 1939 mais périt victime de la guerre. C’est dans* **Sphinx** *que fut publié en mai 1931 le premier exemple de multiplication cryptée qui est donné ci-dessous :*

$$\begin{array}{r} ABC \\ \times\ DE \\ \hline FEC \\ DEC \\ \hline HGBC \end{array}$$

(Source : sesamath.net)

   - **a.** En utilisant les égalités suivantes : $D \times \overline{ABC} = \overline{DEC}$ et $E \times \overline{ABC} = \overline{FEC}$, montrer que 100 divise $(D-E)\overline{BC}$.
   - **b.** Montrer qu’alors $C = 0$ ou 5 et conclure que C vaut 5.
   - **c.** Montrer que 4 divise $(D-E)$.
   - **d.** Résoudre ce cryptarithme.

4. On considère le cryptarithme
$\overline{SEND} + \overline{MORE} = \overline{MONEY}$ (*casse-tête d'Henry Dudeney sorti* en 1924 *dans le* **Strand Magazine***, la revue mensuelle qui publiait les aventures de Sherlock Holmes, photo : source : WIKIPEDIA)*.



a. Montrer que $\overline{MONEY} < 20000$ et en déduire que M est égal à 1.

b. Montrer que O est égal à 0.

c. Expliquer pourquoi alors $\overline{MORE} \leq 1098$ et $\overline{MONEY} \geq 10234$ et en déduire que $S = 9$.

d. Montrer que $\overline{END} + \overline{RE} = \overline{NEY}$ et en déduire que $N = E + 1$.
Justifier que $D + \overline{RE} = Y + 90$ et conclure que $R = 8$.

e. Terminer la résolution du cryptarithme $\overline{SEND} + \overline{MORE} = \overline{MONEY}$.