académie Bordeaux
RÉGION ACADÉMIQUE NOUVELLE-AQUITAINE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Académie de Bordeaux

Mercredi 11 mars 2020 de 8 h 00 à 12 h 10

Pause de 10 h à 10 h 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. **Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**

La première partie de l'épreuve contient trois exercices (exercices nationaux).

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

La deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices (exercices académiques).

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2 (*Décompositions et Suite de Syracuse*).

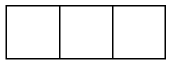
Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3 (*Décompositions et Mariage chez les Murngin*).

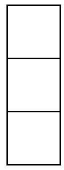
1ère Partie – 8h00 à 10h00
Exercices nationaux

Exercice national 1 (à traiter par tous les candidats)

Batailles navales

Un joueur effectue une sorte de « bataille navale » sur un damier carré de $n \times n$ cases, avec $n \geq 3$. Un bateau est représenté par un rectangle constitué de trois cases de la taille des cases du damier. Il est placé horizontalement ou verticalement sur trois cases du damier.





Le bateau est invisible du joueur.

Le joueur effectue plusieurs tirs sur des cases distinctes du damier dans le but de toucher au moins une des cases occupées par le bateau.

On appelle *« jeu optimal »* un ensemble de tirs permettant de toucher le bateau à coup sûr, quelle que soit la position occupée par celui-ci, et comprenant le nombre minimal de tirs pour y parvenir.

On note $\mathrm{J}(n)$ le nombre de tirs réalisés dans un jeu optimal. Le but de cet exercice est de déterminer $\mathrm{J}(n)$ et de réaliser un jeu optimal effectif.

Partie A : étude de trois cas particuliers

1. Cas où $n = 3$
- **a.** Combien de positions différentes le bateau est-il susceptible d'occuper sur le damier ?
- **b.** Reproduire le damier sur la copie et indiquer trois cases sur lesquelles tirer pour que le bateau soit touché à coup sûr. On placera une croix ($\times$) dans chacune de ces cases.
- **c.** Montrer qu'on ne peut pas réaliser un jeu optimal avec deux tirs.
- **d.** En déduire que $\mathrm{J}(3) = 3$.

2. Cas où $n = 4$
- **a.** Sur un damier 4×4, indiquer cinq positions pour le bateau qui n'ont aucune case en commun deux à deux. Que peut-on en déduire pour $\mathrm{J}(4)$?
- **b.** Représenter un jeu optimal à cinq tirs sur un damier 4×4. En déduire $\mathrm{J}(4)$.

3. Cas où $n = 5$. Montrer que $\mathrm{J}(5) = 8$.

Partie B : cas général

1. Cas où $n = 3p$, avec p entier et $p \geq 1$
- **a.** Indiquer une façon de placer sur le damier un nombre maximal de positions disjointes deux à deux pouvant être occupées par le bateau. Que peut-on dire de $\mathrm{J}(3p)$?
- **b.** En utilisant le schéma proposé en **A1.b**, expliquer comment réaliser un jeu optimal pour $n = 3p$.
- **c.** Montrer que $\mathrm{J}(3p) = 3p^2$.

2. Cas où $n = 3p + 1$, avec p entier et $p \geq 1$
- **a.** Combien peut-on placer au maximum sur le damier de positions du bateau disjointes deux à deux ?
- **b.** Réaliser un jeu optimal pour $n = 3p + 1$ en expliquant avec précision la démarche.
- **c.** Que vaut $\mathrm{J}(3p + 1)$?

3. Recherche d'une caractérisation commune de $\mathrm{J}(n)$, pour tout entier $n \geq 3$.
On traite le cas $n = 3p + 2$ par des raisonnements analogues à ceux des cas $n = 3p$ et $n = 3p + 1$ et on obtient : $\mathrm{J}(3p + 2) = 3p^2 + 4p + 1$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, J(n) est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n}{3}$.
b. Existe-t-il un entier n tel que J(n)= 2020 ?

Exercice national 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Ensembles surprenants

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Dans tout l'exercice, les ensembles considérés sont des sous-ensembles finis non vides de $\mathbb{N}^*$.
Si A est un tel ensemble, on désigne par $P(A)$ le produit des éléments de A et par $C(A)$ la somme des carrés des éléments de A.
Par exemple, si $A = \{1, 2, 5\}$, alors $P(A) = 1 \times 2 \times 5 = 10$ et $C(A) = 1^2 + 2^2 + 5^2 = 30$.

On dit qu'un ensemble fini A est *surprenant* si $P(A) = C(A)$.

1. Deux exemples.
a. L'ensemble $\{1, 2, 3, 2020\}$ est-il surprenant ?
b. L'ensemble $\{6, 15, 87\}$ est-il surprenant ?

2. On considère un sous-ensemble fini A de $\mathbb{N}^*$tel que $P(A) \geq 5$.
a. Quels sont les nombres x vérifiant l'égalité
$$xP(A) = P(A) - 1 + x^2 \text{ ?}$$
b. Montrer que le nombre $P(A) - 1$ n'appartient pas à A.
c. On note A' l'ensemble obtenu en ajoutant l'entier $P(A) - 1$ à l'ensemble A. En d'autres termes,
$$A' = A \cup \{P(A) - 1\}.$$
Exprimer $P(A') - C(A')$ en fonction de $P(A) - C(A)$.
d. En déduire que si $P(A) > C(A)$, on peut trouver un ensemble surprenant B contenant A.
e. Trouver un ensemble surprenant contenant l'ensemble $\{3, 4, 9\}$.

3. On considère à nouveau un sous-ensemble fini A de $\mathbb{N}^*$ tel que $P(A) \geq 5$.
a. Prouver que le nombre $P(A) - 2$ n'appartient pas à A.
b. En déduire que si $P(A) < C(A)$, on peut trouver un ensemble surprenant B contenant A.

4. En déduire finalement que, pour tout sous ensemble fini non vide A de $\mathbb{N}^*$, on peut trouver un ensemble surprenant B qui contenant A.

5. Montrer qu'on peut trouver un ensemble surprenant ayant 67 éléments et contenant $A = \{1, 2, 5\}$.

Exercice national 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Mathématiques et cryptographie, une longue histoire !

Le chiffre de César ou le chiffrement par décalage est une méthode de chiffrement très simple utilisée par Jules César dans ses correspondances secrètes. Le texte chiffré s'obtient en décalant chaque lettre d'un nombre fixe, appelé clé, dans l'ordre de l'alphabet.

Par exemple avec une clé de 3 vers la droite, A est remplacé par D, B devient E, et ainsi jusqu'à W qui devient Z, puis X devient A etc.

1. Coder le mot suivant avec la clé 3 : OLYMPIADES
2. Décoder le message suivant, chiffré par la méthode de César avec la clé 9 :
   JWWNN MNB VJCQNVJCRZDNB
3. Décoder les trois parties du texte suivant, chiffré par la méthode de César, dont la clé est à deviner :

Texte 1 : signé Alan Turing

Chers amateurs de mathématiques,

Depuis ma naissance en *qmppi riyj girx hsydi*, la cryptographie me passionne. Le décodage est simpliste même si *Tcxleksvi ri ey wmbmiqi wmigpi ezerx Niwyw Glvmwx* l'aurait trouvé brillant.

Eper Xyvmrk

Soit a et b deux nombres entiers. Le cryptage affine consiste à remplacer chaque lettre de l'alphabet par un nombre, en commençant par 0 pour la lettre A, 1 pour la lettre B... jusqu'à 25 pour la lettre Z, puis à remplacer le nombre initial x par le nombre y qui est le reste de la division euclidienne de $a\,x + b$ par 26. Le couple $(a;\ b)$ forme la clé du cryptage.

4. Avec la clé $(a\ ;\ b) = (22\ ;\ 4)$, détailler les calculs pour la lettre B.
5. Toujours avec la clé $(a\ ;\ b) = (22\ ;\ 4)$, coder les lettres D et Q.
   Quel problème pratique engendre l'utilisation de cette clé ?
6. On change de clé : on prend $(a\ ;\ b) = (9\ ;\ 4)$.

Dans l'algorithme ci-contre, m % 26 désigne le reste de la division euclidienne de m par 26. Par exemple, 28 % 26 $= 2$.

Cet algorithme permet de remplir le tableau de la question a.

```
Entrer a
Entrer b
x ←  0
Tant que x < 26
      m ← ax +b
      y ← m % 26
      Afficher x, y
      x ← x + 1
Fin tant que
```

a. Recopier sur votre copie le tableau ci-dessous et le compléter pour tout l'alphabet.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	....
Rang x	0	1	2	3	4	5	...	...	...	....
$m = ax + b$	4									
Rang y	4									
En crypté	E									

b. La clé $(9\,;4)$ résout elle le problème rencontré à la question 5 ?

7. Décoder la partie du texte suivant, codé avec la clé $(a;\ b) = (9;\ 4)$

Texte 2

Le mot algorithme tire son origine de *Ez-Qpeuebyviy ro or kojt wort scetbo lyrgtk*, père de l'algèbre.

8. Proposer un algorithme de décodage. Toute trace de recherche sera prise en compte.

9. Quel est le principal défaut des deux systèmes de codage vus précédemment ?

On peut reprendre le chiffre de César de la partie 1 en changeant de clé pour chaque lettre. Ce chiffrement, le chiffrement de Vigenère, introduit la notion de clé, qui peut se présenter sous forme d'un mot ou d'une phrase. On choisit par exemple le mot clé VIGENERE, ce qui donnera :

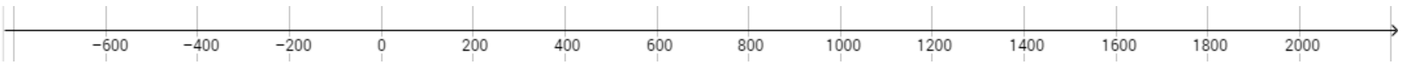
- la clé 21 (lettre V) pour la 1^re^ lettre du message à coder,
- la clé 8 (lettre I) pour la 2^e^ lettre,
- la clé 6 (lettre G) pour la 3^e^ lettre, etc...
- la clé 4 (lettre E) pour la 8^e^ lettre puis on recommence avec la clé 21 (lettre V) pour la 9^e^ lettre, etc.

10. Décoder avec cette clé la date de naissance de Blaise Vigenère.

Texte 3

HQRPR GZRL KKRG ZZRBB-ZVBMJ

11. Remplir la frise ci-dessous avec les noms des trois mathématiciens évoqués dans les textes précédents ainsi que leur année de naissance, parfois approximative.



$2^{\text{ème}}$ Partie – 10h10 à 12h10
Exercices académiques

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Décompositions

Préambule

Un entier N composé de neuf chiffres s'écrit sous la forme $N = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9}$ où x_1 est un entier compris entre 1 et 9 et x_2, x_3….. et x_9 sont des entiers compris entre 0 et 9.

On considère l'entier à neuf chiffres N_1 suivant : N_1 = 123 456 789

Partie A

1. Calculer la somme et le produit des chiffres composant N_1.
2. Proposer un autre entier N composé de neuf chiffres dont la somme et le produit des chiffres sont les mêmes que ceux de N_1.
3. En déduire qu'il existe au moins 362 880 entiers à neuf chiffres dont la somme et le produit des chiffres sont les mêmes que ceux de N_1.

Partie B

On s'intéresse dans cette partie aux entiers à neuf chiffres N vérifiant les trois conditions suivantes :

- $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \ \ldots\ldots.. \leq x_9$.
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 45$ (S)
- $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_5 \times x_6 \times x_7 \times x_8 \times x_9 = 362\,880$ ….(P)

L'objectif de cette partie est de déterminer les éventuels entiers N, **différents de N_1**, vérifiant (S) et (P).

1. Montrer que le nombre de chiffres impairs composant N est impair.
2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 362 880. En déduire que 3^5 ne divise pas 362 880.
3. Montrer que les chiffres 5 et 7 apparaissent exactement une fois dans l'écriture de N. En déduire que les autres chiffres composant N sont divisibles par 2 ou par 3.
4. Montrer qu'il n'existe pas d'entier N vérifiant (S) et (P) comportant un seul 9 et deux 3.
5. Montrer que le chiffre 6 n'apparaît pas dans l'écriture de N.
6. En déduire le (les) éventuel(s) entier(s) N composé(s) de 9 chiffres vérifiant (S) et (P).

Exercice académique 2 (à traiter par les candidats ayant suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Suite de Syracuse

D'après la revue « Pour la Science Hors-Série n° 103 »

Cet exercice comporte une annexe (en fin de sujet) à rendre avec la composition

On considère la fonction f qui, à tout entier naturel n, associe l'entier naturel $f(n)$ définie de la façon suivante :

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3n + 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On considère la suite u de terme initial u_0 (entier non nul) et définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Par exemple si $u_0 = 7$ alors $u_1 = 3 \times 7 + 1 = 22$, $u_2 = \frac{22}{2} = 11$ et $u_3 = 3 \times 11 + 1 = 34$.

On pourra schématiser ces résultats par $7 \to 22 \to 11 \to 34 \to \ldots$

1. Poursuivre le schéma précédent en calculant 15 valeurs supplémentaires.
2. Si a et b sont deux entiers non nuls tels que $b = f(a)$, on dit que b est le fils de a et que a est un parent de b.

   a) Justifier que tout entier naturel n a au moins un parent.

   b) Donner un exemple d'entier ayant 2 parents.

   c) Justifier que pour tout entier naturel n, l'entier $12n + 8$, n'a qu'un seul parent.
3. Compléter sur la feuille fournie en annexe les schémas 1 et 2.
4. Non encore démontrée, une conjecture affirme que, pour n'importe quelle valeur de u_0 non nulle, il existe un entier n pour lequel $u_n = 1$.

On suppose que cette conjecture est vraie.
Ecrire en langage naturel un algorithme dans lequel on demande à l'utilisateur de choisir la valeur de u_0 et qui fournit en retour la première valeur de n pour laquelle $u_n = 1$.

5. On appelle cycle de longueur m un ensemble d'entiers naturels non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_m$ distincts deux à deux tels que $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_m$.

   a) Donner un exemple de cycle de longueur 3.

   b) On désigne par $\{a, b, c\}$ un cycle de longueur 3 où $a \to b \to c$, a désignant le plus petit des 3 éléments. Justifier que a est impair. Calculer b en fonction de a, c en fonction de b et a en fonction de c.

   c) En déduire qu'il n'existe qu'un seul cycle de longueur 3.
6. Etude des cycles de longueur 5

   a) Soit $a \to b \to c \to d \to e \to a$ où a désigne le plus petit des 5 éléments. Calculer b en fonction de a et c en fonction de b.

   b) Montrer que si c est pair alors $d < a$. En déduire d en fonction de c, puis e en fonction de d et enfin a en fonction de d.

   c) On désigne par P le produit. En utilisant les résultats précédents et le produit $abcde$, établir que $8ac = (3a + 1)(3c + 1)$.

d) En déduire qu'il n'existe pas de cycle de longueur 5.

7. Etude des cycles de longueur 18

On suppose qu'il existe un cycle de longueur 18, formé de p nombres pairs et de q nombres impairs, $p + q = 18$. Sans tenir compte de l'ordre dans lequel ces entiers interviennent dans le cycle, on désigne par C l'ensemble de ces entiers. $C = \{a_1\ ,\ a_2\ , \dots ,\ b_1\ ,\ b_2\ , \dots , b_q\ \}$, où pour $1\ \leq i\ \leq p, a_i$ est pair et pour $1\ \leq j\ \leq q, b_j$ est impair.
Soit $C' = \{f(a_1\ ),\ f(a_2\ ), \dots\ ,\ f(a_p\ ),\ f(b_1\ ),\ f(b_2\ ), \dots\ ,\ f(b_q\ )\}$. On désigne enfin par P le produit des éléments de C et par P' celui des éléments de C'.

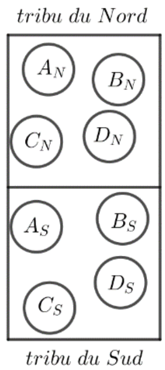
a) Justifier que $P = P'$.

b) En déduire que $2^p = \left(3 + \frac{1}{b_1}\right)\left(3 + \frac{1}{b_2}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{b_q}\right)$, puis que $3^q < 2^{18-q} < 4^q$ et qu'il n'existe pas de cycle de longueur 18.

8. Que prouverait l'existence d'un cycle de longueur supérieure à 3 ?

Exercice académique 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Mariage chez les Murngin



D'après des travaux de Claude Levy Strauss et André Weil

La peuplade aborigène australienne des Murngin est composée de deux tribus, celle du Nord et celle du Sud. Chacune d'entre elles est formée de quatre clans A, B, C, D indexés d'un N ou d'un S suivant l'appartenance à l'une ou l'autre des tribus.

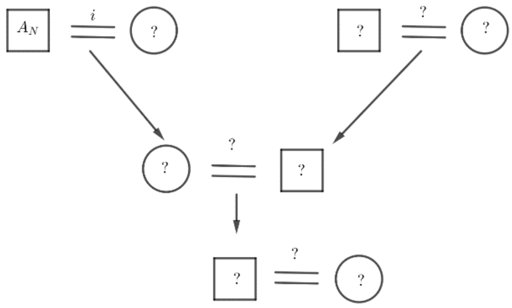
S'étant rendu compte des méfaits des mariages entre personnes du même clan, ils ont établi des règles sociales suivantes afin d'y remédier.

- ✓ Règle 1 : Un homme de clan A épouse toujours une femme de clan B, un homme de clan B épouse toujours une femme de clan A, un homme de clan C épouse toujours une femme de clan D, un homme de clan D épouse toujours une femme de clan C. Ce mariage peut être interne (à l'intérieur de la même tribu) ou externe (époux de tribus différentes). Ainsi un homme de clan A_N peut épouser une femme de clan B_N si le mariage est interne, ou B_S si le mariage est externe.
- ✓ Règle 2 : Un enfant n'est pas élevé par ses parents mais il est recueilli par un autre clan de la manière suivante :

Si la mère est du clan	A_N	A_S	B_N	B_S	C_N	C_S	D_N	D_S
Alors l'enfant sera du clan	C_S	C_N	D_S	D_N	A_N	A_S	B_N	B_S

- ✓ Règle 3 : Le type de mariage (interne ou externe) d'une fille est le même que celui de ses parents, celui d'un garçon est l'inverse de celui de ses parents.

1. Recopier et compléter l'arbre généalogique suivant où les carrés schématisent un homme du clan inscrit dans ce carré, un cercle schématise une femme du clan inscrit dans ce cercle, deux traits parallèles surmontés d'un *i* ou d'un *e* représente un mariage de type interne ou externe, une flèche signale un enfant issu d'un mariage.



2. Par la suite, chacun des 8 clans est codé par un triplet (a, b, c) défini de la manière suivante :
   - $a = \begin{cases} 0 \text{ si le clan est A ou B} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$
   - b = 0 si le clan est A ou C et b = 1 sinon
   - c = 0 si le clan fait partie de la tribu du Nord et c = 1 sinon.

   Par exemple le clan A_N est codé par (0,0,0).

   a. Coder les sept autres clans.

   b. Un mariage entre un homme et une femme est entièrement déterminé par la donnée du clan de l'époux et par le type de mariage (interne ou externe). On peut donc le coder par un quadruplet (a, b, c, d) où (a, b, c) code le clan de l'époux comme précédemment et d = 0 si le mariage est interne et d = 1 sinon. Ainsi (0,0,0,1) code le mariage entre un homme de A_N et une femme de B_S.

   Un homme de C_N épouse une femme de D_N. Quel est le code de leur mariage ? Quel sera le code du mariage d'un de leur fils ?

   c. Une femme dont le clan est codé (0,1,1) se marie avec un homme de l'autre tribu. Quel est le code de son mariage ? Quel sera le code de mariage d'une de ses filles ?

3. On dira que deux entiers *m* et *m'* sont équivalents et on écrit $m \equiv m'$, s'ils ont la même parité, c'est-à-dire qu'ils sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

   a. Justifier que si $m \equiv m'$ alors, quel que soit l'entier *p*, $m + p \equiv m' + p$

   b. Justifier que si $x \equiv a + 1$ alors $a \equiv x + 1$

   c. Justifier que, quel que soit l'entier *p*, $m \equiv m + 2p$

Dans la suite on dira que les quadruplets (m, n, p, q) et (m', n', p', q') sont équivalents si $m \equiv m', n \equiv n', p \equiv p', q \equiv q'$.

4. On considère un mariage de type (a, b, c, d).

   a. Montrer que le code du clan de l'épouse est équivalent à $(a, b+1, c+d)$. On pourra étudier séparément les cas d = 0 et d =1.

   b. Le code du clan d'une épouse étant (x, y, z), déterminer celui d'un de ses enfants.

   c. En déduire que le code du clan d'un enfant issu d'un mariage de type (a, b, c, d) est équivalent à $(a+1,\ b+1,\ a+c+d+1)$.

5. On désigne par $f(\mathrm{M})$ et $g(\mathrm{M})$ les types de mariage respectifs d'un garçon et d'une fille issus d'un mariage de type M.

   a. Déduire de **4.c** l'expression de $f(\mathrm{M})$ si M est de type (a, b, c, d).

   b. Déterminer le code du clan de l'époux d'une femme du clan $(a+1,\ b+1,\ a+c+d+1)$.

   c. En déduire l'expression de $g(\mathrm{M})$ si M est de type (a, b, c, d).

   d. Vérifier que $f(g(\mathrm{M})) = g(f(\mathrm{M}))$ et en déduire que le mariage entre un homme et la fille du frère de sa mère est permis.

ANNEXE DE l'EXERCICE 2 : Compléter les deux schémas ci-dessous

NOM :

Schéma 1

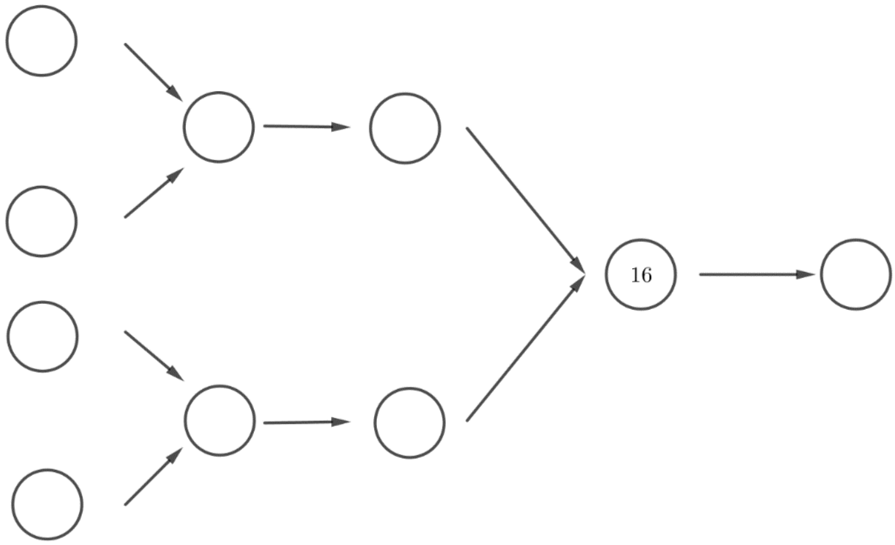


Schéma 2