Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Exercice national 1 (à traiter par tous les candidats)

Batailles navales

<u>Bataille Navale. Éléments de correction</u>

Partie A

1. **a)** 6 positions différentes. Il peut occuper une ligne (3 possibilités) ou une colonne (3 possibilités).

b) Plusieurs possibilités. Par exemple :

	×	
		×
×		

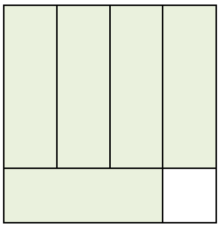
×		
	×	
		×

ou

c) Avec deux tirs on ne touche qu'une ou deux lignes (resp. colonnes). Un bateau placé sur une des lignes (resp colonnes) non touchées n'est pas atteint. On ne peut donc pas réaliser de jeu optimal avec deux tirs.

d) D'après c) $J(3) > 2$. D'après b) : $J(3) \leq 3$. Donc $J(3) = 3$.

2. **a)**



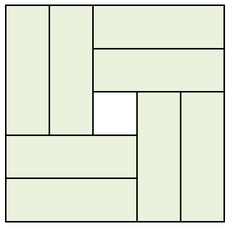
Il faut au moins 5 tirs pour toucher à coup sûr chacune de ces positions possibles du bateau. Donc $J(4) \geq 5$.

b) Par exemple :

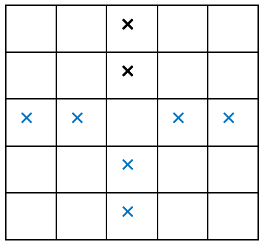
	×		
		×	
×			×
	×		

Que le bateau soit sur une ligne (2 positions possibles par ligne) ou sur une colonne (2 positions possibles par colonne) il est touché par un des tirs représentés par des x ci-contre. Et on ne peut pas réaliser cela avec moins de 5 tirs cf a). Donc le jeu représenté est un jeu optimal et $J(4) = 5$

3. On peut placer le bateau sur l'une des huit positions deux à deux disjointes grisées ci- contre.
Un jeu optimal doit permettre de toucher le bateau dans toutes ces positions (et dans d'autres). Il faut au moins huit tirs, un au moins par zone grisée. Donc $J(5) \geq 8$



Que le bateau soit sur une ligne (3 positions possibles par ligne) ou sur une colonne (3 positions possibles par colonne) il est touché par un des tirs représentés par des x ci- contre.
Le jeu visualisé ci-contre permet donc à coup sûr de toucher le bateau, où qu'il soit.
Ce jeu comporte 8 tirs. Donc $J(5) \leq 8$.

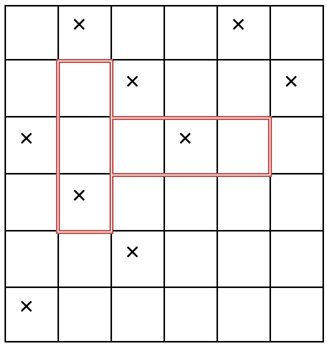


$J(5) \geq 8$ et $J(5) \leq 8$ donc : $J(5) = 8$

Partie B

1. Cas $n = 3p$

a) On peut identifier sur chaque ligne (ou colonne) p blocs successifs de trois cases. Ceci sur $3p$ lignes (ou colonnes). Cela permet de recouvrir complètement le damier à l'aide de $3p^2$ blocs deux à deux disjoints de trois cases alignées. Il faut donc au moins $3p^2$ tirs pour espérer toucher le bateau, où qu'il se trouve.
Donc $J(3p) \geq 3p^2$.



b) et c) On considère le damier $n \times n$ comme une juxtaposition de p^2 damiers 3×3 cases. On place dans chacun de ces damiers les croix de la même façon, comme en A-1-b). On vérifie que sur chaque ligne les croix successives sont espacées de deux cases. Ce qui ne laisse pas de place à trois cases consécutives non atteintes par un tir. De même sur les colonnes

Ce jeu permet donc de toucher le bateau où qu'il soit. Et il est composé de $3p^2$ tirs. D'après a), il n'existe pas de jeu comportant moins de tirs et permettant de toucher le bateau où qu'il soit. Donc ce jeu est optimal et $J(3p) = 3p^2$

2. Cas $n = 3p + 1$

a) Pour obtenir le damier ($3p$+1)×($3p$+1) on complète le damier $3p$×$3p$ par une ligne de $3p$+1 cases en bas et une colonne de $3p$ cases à droite. A partir des $3p^2$ blocs successifs de trois cases déjà obtenus sur le damier $3p$×$3p$, on peut ajouter p blocs successifs de trois cases en position horizontale en bas et p blocs successifs de trois cases en position verticale à droite. Il reste une case non recouverte dans le coin. On obtient ainsi $3p^2+2p$ blocs successifs de trois cases deux à deux disjoints.

Donc $J(3p + 1) \geq 3p^2 + 2p$.

b) et c) Reprenant la grille du jeu optimal pour le cas n=3p, on complète par des croix comme dans A-2-b), sur la ligne rajoutée en bas et sur la colonne rajoutée à droite. On rajoute ainsi $2p$ croix aux $3p^2$ croix déjà placées. D'où un jeu de $3p^2 + 2p$. tirs qui permet de toucher à coup sûr le bateau. Il est optimal d'après a) et $J(3p + 1) = 3p^2 + 2p$

3.

a) Plusieurs démarches possibles. Par exemple :

dans tous les cas, $J(n)$ est un entier (par sa définition même).

<u>**Si $n = 3p$**</u> : $J(n) = 3p^2$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2$.

Donc , $J(n)$, qui est égal à $\frac{n^2}{3}$, est a fortiori inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$ et l'entier suivant, $J(n) + 1$est strictement supérieur à $\frac{n^2}{3}$. Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

<u>Si $n = 3p + 1$</u> : $J(n) = 3p^2 + 2p$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2 + 2p + \frac{1}{3}$. Donc , $J(n) < \frac{n^2}{3}$

Et $(n) + 1 = 3p^2 + 2p + 1$. Donc : $\frac{n^2}{3} < J(n) + 1$.

Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

<u>Si $n = 3p + 2$</u> : $J(n) = 3p^2 + 4p + 1$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2 + 4p + \frac{4}{3} = 3p^2 + 4p + 1 + \frac{1}{3}$. Donc , $J(n) < \frac{n^2}{3}$

Et $J(n) + 1 = 3p^2 + 4p + 2$. Donc : $\frac{n^2}{3} < J(n) + 1$.

Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

b) La réponse est non : En effet , $\frac{77^2}{3} < 1977 \quad 2028 = \frac{78^2}{3}$ donc $J(n) < 2020$ si $n \leq 77$ et $J(n) > 2020$ si $n \geq 78$.

Exercice national 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Ensembles surprenants

1. ***a.*** Soit $E = \{1, 2, 3, 2\,020\}$. $P(E) = 1 \times 2 \times 3 \times 2\,020 = 12\,120$ et $C(E) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2\,020^2 = 4\,080\,414$. Donc E n'est pas surprenant.
b. Soit $F = \{6, 15, 87\}$. $P(F) = 6 \times 15 \times 87 = 7\,830$ et $6^2 + 15^2 + 87^2 = 7\,830$. F est un ensemble surprenant.

2. ***a.*** L'égalité s'écrit aussi : $(x-1)(P(A)-1-x) = 0$. Il y a deux solutions, 1 et $P(A)-1$.
b. Supposons que le nombre $P(A)-1$ appartient à A. Il existe donc un entier k tel que $P(A) = k(P(A)-1)$.
On peut encore écrire : $(k-1)P(A) = k$, ce qui implique que $k-1$ divise k et donc $k = 2$ et finalement $P(A) = 2$, ce qui est exclu par l'énoncé.
c. Comme $A' = A \cup \{P(A)-1\}$, on a : $P(A') = P(A) \times (P(A)-1)$ et $C(A') = C(A) + (P(A)-1)^2$.
On obtient $P(A') - C(A') = P(A) - C(A) - 1$.
d. En ajoutant un élément nouveau (bien choisi) à l'ensemble A, on obtient un nouvel ensemble pour lequel la différence entre le produit des éléments et la somme des carrés est diminuée de 1 par rapport à A. En opérant $n = P(A) - C(A)$ fois cet élargissement, on parvient à $A_n = B$ tel que $P(A_n) - C(A_n) = 0$, donc à un ensemble surprenant contenant A. Il n'y a pas de risque de rencontrer un élément déjà dans l'ensemble d'après **2. *b.***
e. Appliquons l'algorithme précédent à l'ensemble $G = \{3, 4, 9\}$

Éléments de l'ensemble	**Leur produit *P***	**La somme de leurs carrés**	***P* −1**
$3, 4, 9$	108	106	107
$3,4,9,107$	$11\,556$	$11\,555$	$11\,555$
$3, 4, 9, 107, 11\,555$	$133\,529\,580$	$133\,529\,580$	

Comme dit plus haut, il a fallu deux opérations pour parvenir à un ensemble surprenant.

3. ***a.*** Supposons que le nombre $P(A)-2$ appartienne à A. Il existe un entier k tel que $P(A) = k(P(A)-2)$. Cette égalité s'écrit : $(k-1)P(A) = 2k$. On en conclut que $k-1$ divise $2k$. Il s'ensuit que $k = 2$ ou $k = 3$ (*), ce qui donne les possibilités $P(A) = 4$ ou $P(A) = 3$, contrairement à l'hypothèse.
b. Comme dans la question précédente, nous adjoignons le nombre $P(A)-2$ à l'ensemble A pour obtenir l'ensemble A_1. Pour toute partie finie X de $\mathbb{N}^*$, notons $f(X) = P(X) - C(X)$. On compare $f(A_1)$ et $f(A)$:

$$f(A_1) - f(A) = P(A)(P(A)-2) - C(A) - (P(A)-2)^2 - P(A) + C(A)$$

Ou encore : $f(A_1) - f(A) = P(A) + 4$.
En passant de A à A_1, la différence entre le produit des éléments et la somme de leurs carrés (qui est, au départ, négative, augmente). On poursuit le processus jusqu'à trouver par adjonction successive d'éléments (là encore il n'y a pas possibilité de redondance), un ensemble A_n tel que :
- ou bien $f(A_n) = 0$, auquel cas c'est terminé, A_n est surprenant ;
- ou bien $f(A_n) > 0$, et on est ramené à la situation de la question **2.** On sait comment continuer pour trouver un ensemble surprenant qui contienne tous ceux qui l'ont précédé dans le processus, dont A.

4. Il ne reste plus à examiner que les sous-ensembles finis non vides de **N*** dont le produit des éléments est strictement inférieur à 5. Pour chacun d'entre eux, on cherche un ensemble surprenant qui le contienne. On peut adjoindre à chacun le nombre 5, qui assure que le (nouveau) produit est supérieur à 5 et on se ramène aux cas précédents.

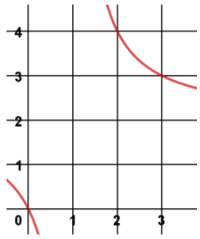
5. On a vu au début de l'énoncé que $P(A) = 10$ et $C(A) = 30$. On applique l'algorithme du **3. *b.***

Éléments de l'ensemble	**Leur produit *P***	**La somme de leurs carrés**	***P* −2**
$1, 2, 5$	10	30	8
$1, 2, 5, 8$	80	94	78
$1, 2, 5, 8, 78$	$6\,240$	6178	

La différence $f(A_2) - f(A)$ est cette fois égale à 62 ; elle relève donc de l'algorithme du **2. *d.*** Avec cette méthode, on adjoint 62 éléments aux 5 de A_2. Cela en fait 67 (on ne saurait les écrire tous, le nombre de chiffres augmente très vite…)

____

(*) Si on ne veut pas utiliser l'arithmétique, il suffit de regarder les points à coordonnées entières positives de l'hyperbole $x \longmapsto \frac{2x}{x-1}$



Exercice national 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Mathématiques et cryptographie, une longue histoire !

1. *ROBPSLDGHV*
2. ANNEE DES MATHEMATIQUES
3. Chers amateurs de mathématiques,

Depuis ma naissance en *mille neuf cent douze*, ou presque, la cryptographie me passionne.
Vous utilisez le chiffre de césar pour lire ce message, le décodage est simpliste même si *Pythagore né au sixième siècle avant Jésus Christ* l'aurait trouvé brillant.
Alan Turing

4. Le rang de la lettre B est 1. $22 \times 1 + 4 = 26.$; le reste de la division euclidienne de 26 par 26 est 0 qui correspond à A.
5. Lettre D : $22 \times 3 + 4 = 70$ et $70 = 26 \times 2 + 18$. D est codée par S.

Lettre Q : $22 \times 16 + 4 = 356$ et $356 = 22 \times 16 + 4$. Q est aussi codée par S.
Ce codage n'est pas envisageable car deux lettres différentes sont codées par une même lettre, le décodage n'est donc pas unique.

6.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Rang x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$ax + b$	4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112
Rang y	4	13	22	5	14	23	6	15	24	7	16	25	8
En crypté	E	N	W	F	O	X	G	P	Y	H	Q	Z	I
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Numéro	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
ax + b	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229
Rang y	17	0	9	18	1	10	19	2	11	20	3	12	21
En crypté	R	A	J	S	B	K	T	C	L	U	D	M	V

b) La clé résout le problème évoqué à la question 5, car la dernière ligne contient des éléments distincts : deux lettres différentes sont codées différemment, rendant unique le décodage.

7. Le mot algorithme tire son origine de *Al-Khawarizmi, né en sept cent quatre-vingts*, père de l'algèbre.

8. Algorithme de décodage

N ← 0
Tant que N<26
M ← 3*N+14
Tant que M > 25

M ← M-26
Fin tant que
Afficher M
N ← N+1
Fin tant que

Ou

N ← 0
X ← 0

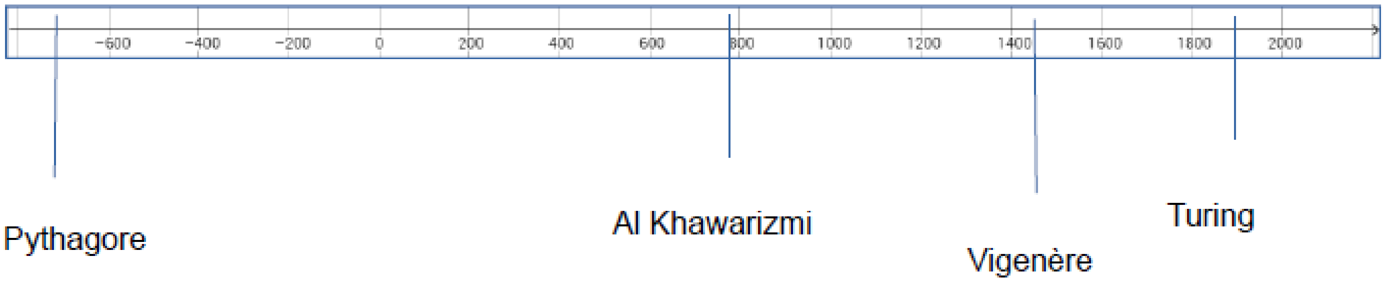
Tant que X<26
M ← 9*X+4
R ← M%26
Si R=N
Afficher X.
Fin si
Fin tant que

N

9. Dans ces deux types de codage, une lettre est toujours codée par une même autre lettre ce qui facilite le décodage, c'est un défaut …

10. *mille cinq cent vingt trois*

11.



Décompositions

Préambule :

Un entier N composé de neuf chiffres s'écrit sous la forme $N = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9}$ où x_1 est un entier compris entre 1 et 9 et x_2, x_3….. et x_9 sont des entiers compris entre 0 et 9.

On considère l'entier à neuf chiffres N_1 suivant : N_1 = 123 456 789

Partie A :

1. Calculer la somme et le produit des chiffres composant N_1.
2. Proposer un autre entier N composé de neuf chiffres dont la somme et le produit des chiffres sont les mêmes que ceux de N_1.
3. En déduire qu'il existe au moins 362 880 entiers à neuf chiffres dont la somme et le produit des chiffres sont les mêmes que ceux de N_1.

Partie B :

On s'intéresse dans cette partie aux entiers à neuf chiffres N tels que

- $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots\dots.. \leq x_9$ (I)
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 45$ (S)
- $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_5 \times x_6 \times x_7 \times x_8 \times x_9 = 362\,880$ (P)

L'objectif de cette partie est de déterminer les éventuels entiers N, **différents de N_1**, vérifiant (I), (S) et (P).

1. Montrer que le nombre de chiffres impairs composant N est impair.
2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 362 880. En déduire que 3^5 ne divise pas 362 880.
3. Montrer que les chiffres 5 et 7 apparaissent exactement une fois dans l'écriture de N. En déduire que les autres chiffres composant N sont divisibles par 2 ou par 3.
4. Montrer qu'il n'existe pas d'entier N vérifiant (I), (S) et (P) composé d'un seul 9 et de deux 3.
5. Montrer que le chiffre 6 n'apparaît pas dans l'écriture de N.
6. En déduire le (les) éventuel(s) entier(s) N composé(s) de 9 chiffres vérifiant (I), (S) et (P).

Partie C :

Dénombrer le nombre total d'entiers à 9 chiffres ayant pour somme des chiffres 45 et pour produit des chiffres 362 880.

Eléments de correction :

Remarque : Comme les entiers *N* doivent vérifier (S) et (P), le chiffre 0 ne peut entrer dans la composition de *N*.

Partie A :

1. La somme vaut 45 et le produit vaut 362 880.
2. Toute permutation des chiffres de N_1 convient.
3. Soit N obtenu par permutation des chiffres de N_1 : on peut choisir x_1 de neuf façons différentes puis x_2 de 8 façons, x_3 de 7 … x_9 d'une façon. Soit un total d'au moins $9! =$ 362 880 entiers composés de neuf chiffres vérifiant (S) et (P).

Partie B :

1. Si la somme des chiffres impairs composant *N* est paire, alors la somme de tous les chiffres composant *N* serait paire, ce qui contredit (S).
2. 362 880 = $2^7 \times 3^4 \times 5 \times 7$. La réponse à la question suivante découle directement de la décomposition.
3. Soit *n* le nombre de fois où le chiffre 5 apparaît dans *N*.
   N vérifiant (P), on peut en déduire que 5^n divise 362 880. Par unicité de la décomposition (à l'ordre près) d'un entier en produit de facteurs premiers, il en vient que $n \leq 1$. Le cas $n = 0$ n'est pas possible car les chiffres éventuels composant *N* seraient 1,2, 3, 4, 6, 7, 8 et 9. Ce qui ne permettrait pas d'obtenir 362 880 qui est divisible par 5.
   De la même façon, 7 apparaît exactement une fois dans l'écriture de *N*.
   La dernière remarque est évidente compte-tenu de la décomposition en produit de facteurs premiers de 362 880 (produit des chiffres composant *N*).
4. Supposons que *N* est composé d'un seul 9 et de deux 3. Dans ce cas, le produit des chiffres de *N* serait divisible par $3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = 2\,835$. Le problème reviendrait à chercher 4 chiffres dans la liste $\{1, 2, 4, 8\}$ dont la somme des chiffres vaudrait 18 et le produit 128.
   Les seules décompositions possibles de 18 avec les chiffres restants sont :
   $18 = 1 + 1 + 8 + 8$, le produit des chiffres valant 64, cela ne convient pas.
   $18 = 2 + 4 + 4 + 8$, le produit des chiffres valant 256 , cela ne convient pas.
   Il n'existe donc pas de nombre *N* composé d'exactement un 9 et deux 3.

5. **Cherchons à présent le nombre de 6 dans la composition de *N* :**
   On a, d'après la question 2 de la partie B, obtenu que le produit des chiffres constituant *N* est divisible par 3^4 mais n'est pas divisible par 3^5 (*)
   D'après la question 3 de la partie B, les chiffres 5 et 7 apparaissent exactement une fois dans la composition de *N*.
   Au vu de ces contraintes, si l'on cherche le nombre de 6 entrant dans la composition de *N*, celui-ci peut être constitué de :
   - <u>Quatre 6</u> : les trois chiffres restants sont à déterminer dans la liste $\{1, 2, 4, 8\}$, ont pour somme 9 et produit $\frac{362\,880}{6^4 \times 5 \times 7} = 8$.
     La seule possibilité est de prendre $1 + 4 + 4$. Le produit des chiffres vaut 16, ce qui ne convient pas.

- <u>Trois 6 et un 3</u> : les trois chiffres restants sont à déterminer dans la liste $\{1, 2, 4, 8\}$, ont pour somme 12 et produit 16.

Les combinaisons possibles sont :
$2 + 2 + 8 = 12$. Le produit des chiffres valant 24, cela ne convient pas.
$4 + 4 + 4 = 12$. Le produit des chiffres valant 64, cela ne convient pas.

- Deux 6 et un 9 : les quatre chiffres restants sont à déterminer dans la liste $\{1, 2, 4, 8\}$, ont pour somme 12 et produit 32.
  Les seules combinaisons possibles sont :
  $1 + 1 + 2 + 8 = 12$. Le produit des chiffres valant 16, cela ne convient pas.
  $2 + 2 + 4 + 4 = 12$. Le produit des chiffres valant 64, cela ne convient pas.

- Deux 6 et deux 3 : les trois chiffres restants sont à déterminer dans la liste $\{1, 2, 4, 8\}$, ont pour somme 15 et pour produit 32. Aucune combinaison n'est possible.

- Un 6, un 3 et un 9 : les quatre chiffres restants sont à déterminer dans la liste $\{1, 2, 4, 8\}$, ont pour somme 15 et pour produit 64.
  La seule combinaison possible est $1 + 2 + 4 + 8 = 15$. Le produit des chiffres valant 64. On retrouve l'entier N_1. Or on cherche les entiers différents, cette décomposition ne convient donc pas.

- Un 6 et trois 3 : les trois chiffres restants sont à déterminer dans la liste $\{1, 2, 4, 8\}$, ont pour somme 18 et produit 64.
  La seule combinaison possible est : $2 + 8 + 8 = 18$. Le produit des chiffres valant 128, cela ne convient pas.

En conclusion, le chiffre 6 ne rentre pas dans la composition de *N*.

6. D'après les questions précédentes : il ne reste plus qu'à étudier les cas où *N* est composé de quatre 3 ou de deux 9.
   SI *N* est constitué de quatre 3 : les trois chiffres restants sont à déterminer dans la liste $\{1, 2, 4, 8\}$, ont pour somme 21 et pour produit 128. Il n'y a pas de combinaison possible.
   SI *N* est constitué de deux 9 : les cinq chiffres restants sont à déterminer dans la liste $\{1, 2, 4, 8\}$, ont pour somme 15 et pour produit 128. Les combinaisons possibles sont :
   $1 + 1 + 1 + 4 + 8 = 15$, le produit des chiffres valant 32, cela ne convient pas.
   $1 + 2 + 2 + 2 + 8 = 15$, le produit des chiffres valant 64, cela ne convient pas.
   $1 + 2 + 4 + 4 + 4 = 15$, le produit des chiffres valant 128, cela convient.

   Il n'y a donc qu'un seul entier autre que *N* vérifiant toutes les contraintes, c'est 124 445 799.

Partie C :

Si les entiers vérifiant (S) et (P) vérifient aussi (I), on peut déduire des parties précédentes qu'il n'en existe que deux :

$n = 123\,456\,789 \text{ } et \text{ } n' = 124\,445\,799$.

Il faut et il suffit pour répondre à la question de déterminer les « anagrammes » distincts de ces deux entiers de référence.

Pour n, il en existe 362 880 d'après la partie A.

Pour n', il suffit de remarquer qu'en procédant par permutation des chiffres 4, on forme six fois l'entier n' puis deux fois par permutation des 9. Ainsi, il existe 12 « anagrammes » identiques à n'.

Ce résultat se généralisant, on peut en déduire qu'il existe $\frac{362\ 880}{12} = \ 30\ 240$ « anagrammes » distincts de n' vérifiant (S) et (P).

Au final, 362 880 + 30 240 = 393 120 entiers à neuf chiffres ont pour somme des chiffres 45 et pour produit des chiffres 362 880.

Suite de Syracuse

d'après la revue "Pour la Science" hors-série n°103 (mai-juin 2019)

On considère la fonction f qui, à tout entier naturel *n*, associe l'entier naturel $f(n)$ définie de la façon suivante :

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3n + 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On considère la suite *u* de terme initial u_0 (entier non nul) et définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Par exemple si $u_0 = 7$ alors $u_1 = 3\times 7+1 = 22$, $u_2 = \frac{22}{2} = 11, u_3 = 3\times 11+1 = 34$.

On pourra schématiser ces résultats par $7 \to 22 \to 11 \to 34 \to \ldots$

1. Poursuivre le schéma précédent en calculant 15 valeurs supplémentaires.
2. Si a et b sont deux entiers non nuls tels que $b = f(a)$, on dit que b est le fils de a et que a est un parent de b.
   a) Justifier que tout entier naturel n a au moins un parent.
   b) Donner un exemple d'entier ayant 2 parents.
   c) Justifier que pour tout entier naturel n, l'entier $12n + 8$, n'a qu'un seul parent.
3. Compléter sur la feuille fournie en annexe les schémas 1 et 2.
4. Non encore démontrée, une conjecture affirme que, pour n'importe quelle valeur de u_0 non nulle, il existe un entier n pour lequel $u_n = 1$.

   On suppose que cette conjecture est vraie.

   Ecrire en langage naturel un algorithme dans lequel on demande à l'utilisateur de choisir la valeur de u_0 et qui fournit en retour la première valeur de n pour laquelle $u_n = 1$.
5. On appelle cycle de longueur *m* un ensemble d'entiers naturels non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_m$ distincts deux à deux tels que $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_m \to a_1$.
   a) Donner un exemple de cycle de longueur 3.
   b) On désigne par $\{a, b, c\}$ un cycle de longueur 3 où $a \to b \to c \to a$, a désignant le plus petit des 3 éléments. Justifier que a est impair. Calculer b en fonction de a, c en fonction de b et a en fonction de c.
   c) En déduire qu'il n'existe qu'un seul cycle de longueur 3.
6. Etude des cycles de longueur 5
   a) Soit $a \to b \to c \to d \to e \to a$ où a désigne le plus petit des 5 éléments. Calculer b en fonction de a et c en fonction de b.
   b) Montrer que si c est pair alors $d < a$. En déduire d en fonction de c, puis e en fonction de d et enfin a en fonction de d.

c) On désigne par P le produit. En utilisant les résultats précédents et le produit $abcde,$ établir que $8ac = (3a+1)(3c+1)$.

d) En déduire qu'il n'existe pas de cycle de longueur 5.

7. Etude des cycles de longueur 18

On suppose qu'il existe un cycle de longueur 18, formé de p nombres pairs et de q nombres impairs, $p+q=18$. Sans tenir compte de l'ordre dans lequel ces entiers interviennent dans le cycle, on désigne par C l'ensemble de ces entiers. $C = \{a_1\ ,\ a_2\ ,\dots,\ b_1\ ,\ b_2\ ,\dots,b_q\ \}$, où pour $1\ \leq i\ \leq p, a_i$ est pair et pour $1\ \leq j\ \leq q, b_j$ est impair.

Soit$C' = \{f(a_1\ ),\ f(a_2\ ),\dots\ ,\ f(a_p\ ),\ f(b_1\ ),\ f(b_2\ ),\dots\ ,\ f(b_q\ )\}$. On désigne enfin par P le produit des éléments de C et par P' celui des éléments de C'.

a) Justifier que $P = P'$.

b) En déduire que $2^p\ = \left(3+\frac{1}{b_1}\right)\left(3+\frac{1}{b_2}\right)\dots\left(3+\frac{1}{b_q}\right)$, puis que $3^q\ <\ 2^{18-q} < 4^q$ et qu'il n'existe pas de cycle de longueur 18.

8. Que prouverait l'existence d'un cycle de longueur supérieure à 3 ?

ANNEXE : Compléter les deux schémas ci-dessous NOM :

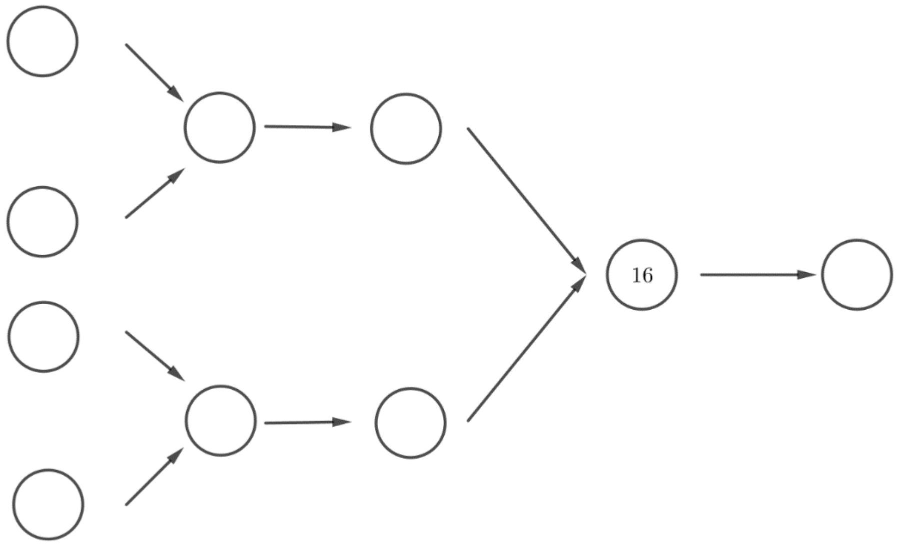


Schéma 1

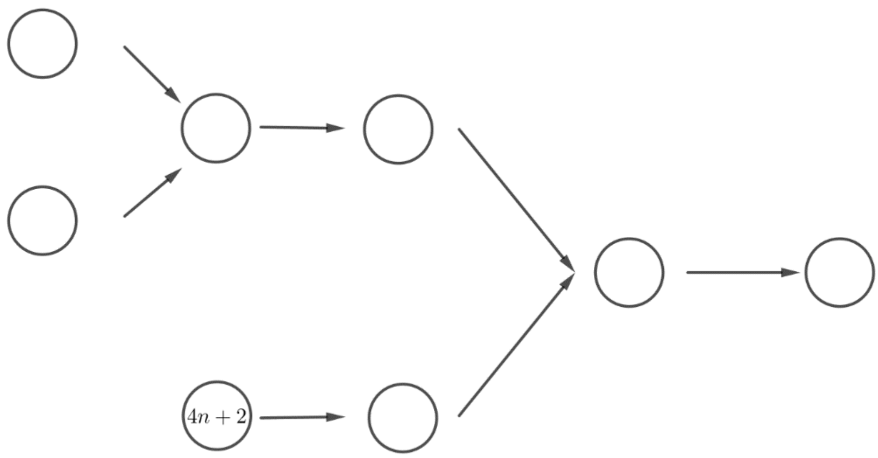


Schéma 2

Correction :

1. $34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \to 2 \to 1$

2. a. $2n$ est toujours un parent de n

   b. 16 a pour parents 5 et 32

   c. $12n+8$ a pour parent $24n+16$. S'il avait un autre parent celui-ci serait impair donc de la forme $3m+1$ où m est un entier naturel. Or si $12n+8=3m+1$ on a $3m-12n=7$, ce qui est impossible puisque $3m-12n$ est un multiple de 3.

3.

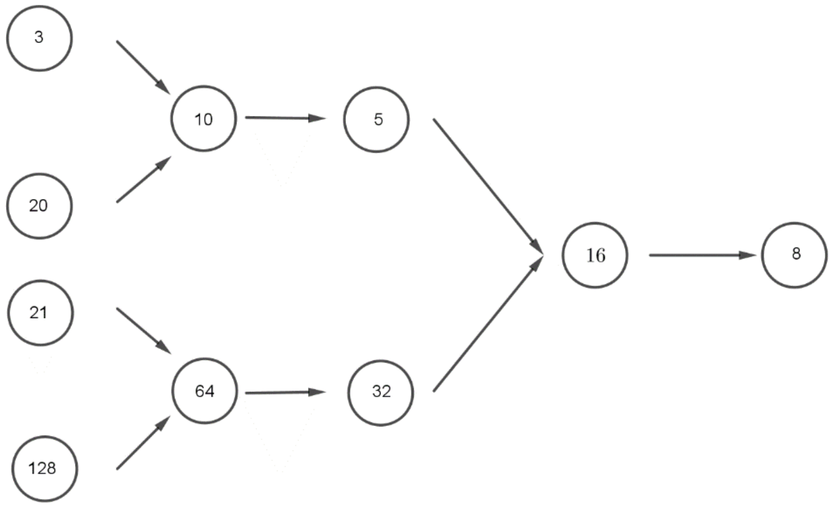


Schéma 1

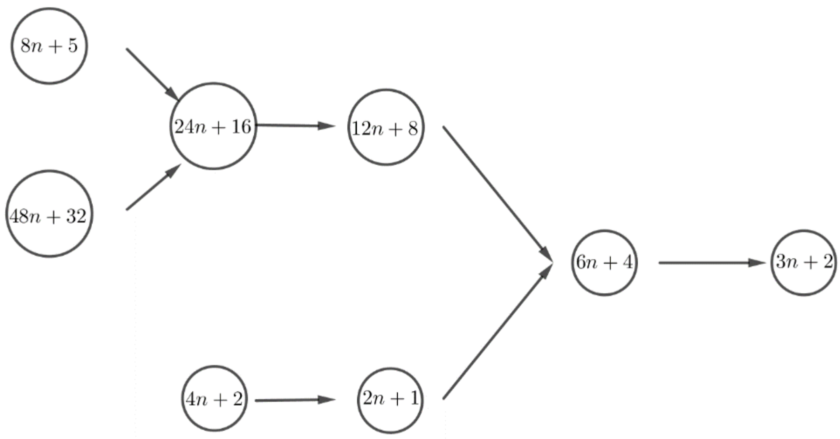


Schéma 2

4. Choisir U

n ←0

Tant que U est différent de 1

n ←1+n

Si U est pair

U ← U/2

Sinon

U ← 3U+1

5. **a.** $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

   b. a n'est pas pair car sinon $b = \frac{a}{2}$ et donc $b < a$. Ainsi, a est impair et $b = 3a + 1$. b est donc pair et $c = \frac{3a+1}{2}$.

   c. $c \rightarrow a$ et $c < a$ donc $c = 2a$ et $2a = \frac{3a+1}{2}$ donc $a = 1$. L'unicité de a entraine celles de b et de c.

6. **a.** $b = 3a + 1$ et $c = \frac{b}{2}$

   b. Si c est pair alors $d = \frac{c}{2} = \frac{3a+1}{4}$. Donc $d - a = \frac{1-a}{4}$ et ainsi $d < a$. Ceci est impossible donc c est impair. En conséquence, $d = 3c + 1$ est pair et ainsi $e = \frac{d}{2}$. Comme $e = 2a$, il en vient que $a = \frac{d}{4}$.

   c. $P = abcde = \frac{d}{4}(3a + 1)\frac{b}{2}(3c + 1)e$, donc $(3a + 1)(3C + 1) = 8ac$.

   d. Or $(3a + 1)(3C + 1) > 9ac > 8ac$. Ceci étant impossible on en déduit qu'il n'existe pas de cycle de longueur 5.

7. **a.** Les entiers constituant l'ensemble C provenant d'un cycle pour la fonction f, les nombres de C' sont les mêmes que ceux de C, donc leurs produits sont égaux.

   b. $f(a_i) = \frac{a_i}{2}$ et $f(a_i) = 3b_j$ pour tout i et pour tout j.

   Donc $a_1\ a_2\ ... a_p\ b_1\ b_2\ ... b_q = \frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2} ... \frac{a_p}{2}(3b_1 + 1)(3b_2 + 1)\ldots(3b_q + 1)$. On en déduit que $2^p\ b_1\ b_2\ ... b_q = (3b_1 + 1)(3b_2 + 1)\ldots(3b_q + 1)$,

   Ainsi, $2^p = \left(3 + \frac{1}{b_1}\right)\left(3 + \frac{1}{b_2}\right) ... \left(3 + \frac{1}{b_q}\right)$.

   Or, pour tout entier i compris entre 1 et q, $3 < 3 + \frac{1}{b_i} < 4$ donc $3^q < 2^p < 4^q$.

Comme $p + q = 18$, on obtient bien que $3^q \; < \; 2^{18-q} < 4^q$.

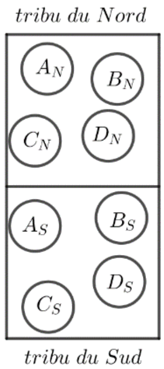
L'inégalité de droite a pour solution $q \; > \; 6$. Or pour $q = 7$, on a $3^7 \; > \; 2^{11}$ et par suite, l'inégalité de gauche n'est jamais vérifiée pour $q \; \geq 7$. La double inégalité n'a donc pas de solution.

Il n'existe donc pas de cycle de longueur 18.

8. L'existence d'un cycle de longueur supérieure à 3 prouverait que la conjecture est fausse.

Mariage chez les Murngin

D'après des travaux de Claude Levy Strauss et André Weil



La peuplade aborigène australienne des Murngin est composée de deux tribus, celle du Nord et celle du Sud. Chacune d'entre elles est formée de quatre clans A, B, C, D indexés d'un N ou d'un S suivant l'appartenance à l'une ou l'autre des tribus.

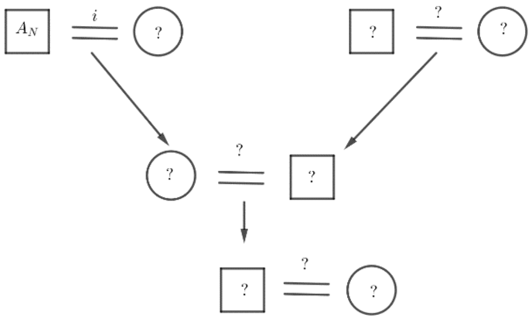
S'étant rendu compte des méfaits des mariages entre personnes du même clan, ils ont établi des règles sociales afin d'y remédier.

- ✓ Règle 1 : Un homme de clan A épouse toujours une femme de clan B, un homme de clan B épouse toujours une femme de clan A, un homme de clan C épouse toujours une femme de clan D, un homme de clan D épouse toujours une femme de clan C. Ce mariage peut être interne (à l'intérieur de la même tribu) ou externe (époux de tribus différentes). Ainsi un homme de clan A_N peut épouser une femme de clan B_N si le mariage est interne, ou B_S si le mariage est externe.
- ✓ Règle 2 : Un enfant n'est pas élevé par ses parents mais il est recueilli par un autre clan de la manière suivante :

Si la mère est du clan	A_N	A_S	B_N	B_S	C_N	C_S	D_N	D_S
Alors l'enfant sera du clan	C_S	C_N	D_S	D_N	A_N	A_S	B_N	B_S

- ✓ Règle 3 : Le type de mariage (interne ou externe) d'une fille est le même que celui de ses parents, celui d'un garçon est l'inverse de celui de ses parents.

1. Recopier et compléter l'arbre généalogique suivant où les carrés schématisent un homme du clan inscrit dans ce carré, un cercle schématise une femme du clan inscrit dans ce cercle, deux traits parallèles surmontés d'un *i* ou d'un *e* représente un mariage de type interne ou externe, une flèche signale un enfant issu d'un mariage.

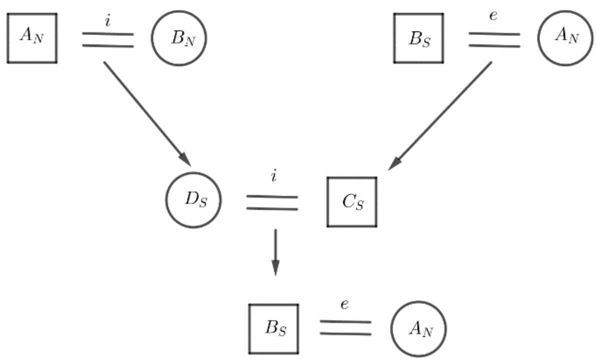


2. Par la suite, chacun des 8 clans est codé par un triplet (a,b,c) défini de la manière suivante :
   - $a = 0$ si le clan est A ou B et $a = 1$ sinon
   - $b = 0$ si le clan est A ou C et $b = 1$ sinon
   - $c = 0$ si le clan fait partie de la tribu du Nord et $c = 1$ sinon.
   Par exemple le clan A_N est codé par (0,0,0).
   a. Coder les sept autres clans.
   b. Un mariage entre un homme et une femme est entièrement déterminé par la donnée du clan de l'époux et par le type de mariage (interne ou externe). On peut donc le coder par un quadruplet (a,b,c,d) où (a,b,c) code le clan de l'époux comme précédemment et $d = 0$ si le mariage est interne et $d = 1$ sinon. Ainsi (0,0,0,1) code le mariage entre un homme de A_N et une femme de B_S.
   Un homme de C_N épouse une femme de D_N. Quel est le code de leur mariage ? Quel sera le code du mariage d'un de leur fils ?
   c. Une femme dont le clan est codé (0,1,1) se marie avec un homme de l'autre tribu. Quel est le code de son mariage ? Quel sera le code de mariage d'une de ses filles ?
3. On dit que deux entiers m et m' sont équivalents et on écrit $m \equiv m'$, s'ils ont la même parité, c'est-à-dire qu'ils sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.
   a. Justifier que si $m \equiv m'$ alors, quel que soit l'entier p, $m + p \equiv m' + p$
   b. Justifier que si $x \equiv a+1$ alors $a \equiv x+1$
   c. Justifier que, quel que soit l'entier p, $m \equiv m + 2p$

Dans la suite on dira que les quadruplets (m,n,p,q) et (m',n',p',q') sont équivalents si $m \equiv m', n \equiv n', p \equiv p', q \equiv q'$.

4. On considère un mariage de type (a,b,c,d).
   a. Montrer que le code du clan de l'épouse est équivalent à $(a,b+1,c+d)$. On pourra faire d = 0, puis d =1.
   b. Le code du clan d'une épouse étant (x,y,z) déterminer celui d'un de ses enfants.
   c. En déduire que le code du clan d'un enfant issu d'un mariage de type (a,b,c,d) est équivalent à $(a+1,b+1,a+c+d+1)$.
5. On désigne par $f(\mathrm{M})$ et $g(\mathrm{M})$ les types de mariage respectifs d'un garçon et d'une fille issus d'un mariage de type M.
   a. Déduire de 4.c l'expression de $f(\mathrm{M})$ si M est de type (a,b,c,d).
   b. Déterminer le code du clan de l'époux d'une femme du clan $(a+1,b+1,a+c+d+1)$
   c. En déduire l'expression de $g(\mathrm{M})$ si M est de type (a,b,c,d).
   d. Vérifier que $f(g(\mathrm{M})) = g(f(\mathrm{M}))$ et en déduire que le mariage entre un homme et la fille du frère de sa mère est permis.

Correction :

1. 

2.
   a.

A_S	B_N	B_S	C_N	C_S	D_N	D_S
(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)

   b. Code du mariage : (1,0,0,0) ; code du mariage d'un fils : (0,1,0,1)
   c. L'épouse étant de B_S et le mariage étant externe, son époux est du clan A_S. Le code du mariage est donc (0,0,1,1).
   Sa fille est du clan D_N, son mariage étant externe elle épouse un homme de C_S. Le code du type de mariage sera (1,0,1,1).
3. L
4.
   a. On remarque que les clans A et B échangent leurs épouses et qu'il en est de même pour C et D. Donc la première composante ne change pas.
   Les clans A ou C prennent leurs épouses dans B ou D et inversement. Par conséquent la deuxième composante est modifiée, ce qui revient à lui ajouter 1.
   Si d = 0, la troisième composante est inchangée (même tribu), si d = 1, elle est modifiée ce qui revient à lui ajouter 1. Dans les deux cas elle devient $c + d$.
   Le code du clan de l'épouse est équivalent à $(a, b+1, c+d)$.
   b. Si le clan de la mère est A ou B celui de l'enfant est C ou D, ce qui modifie x en x + 1. De même si le clan de la mère est Cou D, celui de l'enfant est A ou B. Donc dans les deux cas x est modifié en x + 1.
   Si le clan de la mère est A ou C, celui de l'enfant est C ou A. De même si le clan de la mère est B ou D, celui de l'enfant est D ou B. Donc y n'est pas modifié.
   On remarque que si x = 0 (quatre premières cases) la tribu change tandis que si x = 1 la tribu ne change pas, ce qui revient dans les deux cas à ajouter x + 1. Donc z est modifié en $z + x + 1$.
   Finalement le clan de l'enfant est équivalent à $(x+1, y, z+x+1)$.
   c. En remplaçant x par a, y par b +1 et z par $c + d$, on obtient que le code du clan de l'enfant est $(a+1, b+1, a+c+d+1)$.
5.
   a. $f(\mathrm{M})$ est équivalent à $(a+1, b+1, a+c+d+1, d+1)$ car il suffit de se rappeler qu'un garçon inverse le type de mariage de ses parents.
   b. Si (u, v, w) désigne le clan de l'époux alors d'après 4b, on doit avoir $(u, v+1, w+d) \equiv (a+1, b+1, a+c+d+1)$, ce qui revient à $u \equiv a+1$, $v \equiv b$ et $w \equiv a+c+1$.
   c. Comme la fille garde le type de mariage de ses parents, on a $g(\mathrm{M}) \equiv (a+1, b, a+c+1, d)$

d. $f(g(\mathrm{M})) \equiv f(a+1, b, a+c+1, d) \equiv (a, b+1, 2a+c+d+3, d) \equiv (a, b+1, c+d+1, d)$

$g(f(\mathrm{M})) \equiv g(a+1, b+1, a+c+d+1, d+1) \equiv (a+2, b+1, 2a+c+d+3, d+2)$

$\equiv (a, b+1, c+d+1, d)$

Les deux personnages ont une mère pour l'un et un père pour l'autre qui sont frères et sœurs et donc issus d'un même mariage M. Le mariage de la mère est donc du type *g*(M), celui de son fils du type *f* (g(M)). Le mariage du père est du type *f* (M), celui de sa fille *g*(*f* (M)). Comme *f* (g(M) est équivalent à *g*(*f* (M)), nos deux personnages peuvent se marier.