Séquence 1 : **Modèles d'évolution 1 - Évolution de température**

Contenus associés :

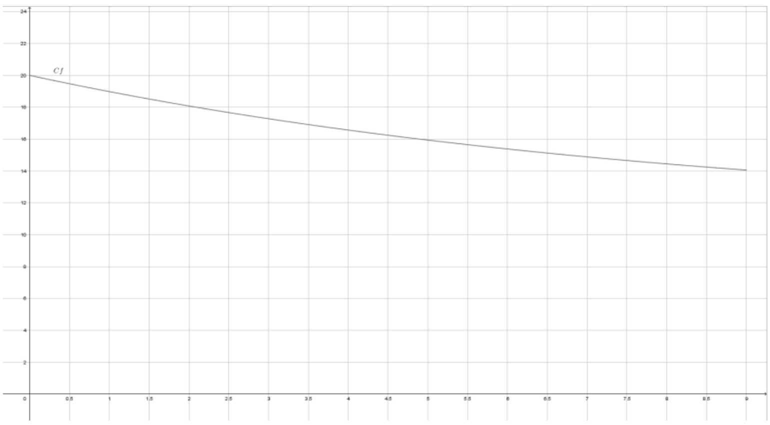
Notions nouvelles	Notions antérieures
– **Suites arithmético-géométriques.** (étude non formalisée) – **Limites 1** (limites de suites géométriques) – **notion d'équations différentielles 1** (vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle…)	– Suites récurrentes. – Suites géométriques. – Fonctions, sens de variation, extremum – Fonction exponentielle.

<u>Évolution de température : une première approche</u>

Le but de ce problème est d'étudier l'évolution de la température d'une pièce, au cours de la nuit, de 22h à 7h le lendemain matin.
On suppose, pour la suite du problème, que la température extérieure est constante et égale à 11°C.
On désigne par t le temps écoulé depuis 22h, exprimé en heures, et par $f(t)$ la température de la pièce exprimée en °C.
La température de la pièce est donc modélisée par une fonction f définie sur l'intervalle [0;9].

PARTIE A : Approche graphique
On admet que la fonction f a pour représentation graphique la courbe suivante:

1. Quel semble être le sens de variation de cette fonction sur l'intervalle [0;9] ?
2. Avec la précision que permet le graphique, estimer la baisse de température dans cette pièce au cours de la nuit.
3. Avec la précision que permet le graphique, estimer l'heure à partir de laquelle la température sera inférieure à 15°C.



PARTIE B : Étude de fonction
1. Dans le contexte de l'étude de l'évolution de la température, prévoir le sens de variation de f sur l'intervalle [0;9].
   On admet désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle [0;9] par :
$$f(t) = 9\,e^{-0{,}12t} + 11$$
2. Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.
3. Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15°C.

Loi de refroidissement de Newton - Modèle discret

On dépose un liquide dans une pièce dont la température est de 21°C.
On souhaite étudier la température après un nombre entier de minutes.
On note alors T_n la température du liquide au bout de n minutes écoulées.
La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux de perte de chaleur d'un corps inerte est proportionnel à la différence de température entre le corps et le milieu environnant, c'est-à-dire

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - 21)\ .$$

Dans cette situation $k = -0{,}03$. On peut alors démontrer que la température du liquide, en °C, en fonction du nombre n de minutes écoulées vérifie, pout tout entier naturel n :

$$T_{n+1} = 0{,}97T_n + 0{,}63.$$

1. On dépose d'abord une tasse de café chauffée initialement à 90°C. On suppose donc dans cette question que $\mathrm{T}_0 = 90$.
   a. Au bout de combien de temps la température du café sera-t-elle inférieure à 30 °C ?
   b. Jeanne affirme : « Comme la température de la pièce ambiante est égale à 21°C, alors la température du café va décroître en demeurant toujours supérieure à 21°C ».
   A-t-elle raison ? Justifier
   c. Que peut-on conjecturer concernant le comportement de la suite (T_n) lorsque n tend vers $+\infty$?
2. On place maintenant dans cette même pièce un verre d'eau sortant du réfrigérateur à 10°C.
   a. Que peut-on conjecturer concernant l'évolution de la température de l'eau contenue dans ce verre ?
   b. Montrer que la suite (U_n) définie par $U_n = T_n - 21$, pour tout n entier naturel, est géométrique.
   En déduire une expression de (T_n) en fonction de n.
3. Conjecturer le comportement de la suite (T_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Loi de refroidissement de Newton - Modèle continu

Un verre d'eau à 20°C est placé dans un réfrigérateur où la température est maintenue constante à 5°C.
On souhaite étudier la température après un instant quelconque positif.
On note $f(t)$ la température de l'eau en °C à l'instant, où t représente le temps exprimé en heures.
L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où le verre est placé dans le réfrigérateur.
On définit ainsi une fonction f sur $[0; +\infty[$. On suppose de plus que cette fonction est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux de perte de chaleur d'un corps inerte est proportionnel à la différence de température entre le corps et le milieu environnant c'est-à-dire :

$$f' = k(f - 5)$$

Cette équation dont l'inconnue est une fonction est appelée équation différentielle. Résoudre une équation différentielle signifie trouver toutes les fonctions qui vérifient l'équation. On utilisera souvent la lettre y pour désigner la fonction inconnue.
Dans cette situation $k = -0,75$. On peut alors démontrer que la température de l'eau, en °C, en fonction du temps t vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' = -0{,}75(y - 5)$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(\mathrm{t}) = 15\mathrm{e}^{-0{,}75\mathrm{t}} + 5$.
   a. Déterminer la fonction dérivée f'.
   b. En déduire que f est une solution de l'équation (E).
2. a. Etudier les variations de la fonction f.
   b. Comment décrire l'évolution de la température ?
3. Selon ce modèle, combien de temps faut-il pour que la température de l'eau atteigne 6°C ?
   Estimer une valeur approchée à 10^{-2} de cette durée à l'aide de la calculatrice.

Etude de cas

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000°C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.
On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.
La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).
La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70°C. Sinon, les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

PARTIE A

Pour tout nombre entier n, on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc T_0 = 1 000.
La température T_n est calculée par la fonction suivante :

```python
def refroidissement(n):
    T = 1000
    for i in range (1,N+1):
        T=0.82*T+ 3.6
    return(T)
```

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4h de refroidissement.
   a. On considère la suite (u_n) définie, pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $u_n = T_n - 20$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
   c. En déduire l'expression de (u_n) en fonction de n.
   d. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$.
2. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques?

PARTIE B

Dans cette partie, on note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.
La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif par :

$$f(t) = a\, e^{-\frac{t}{5}} + b$$

où a et b sont deux nombres réels.
On admet que f vérifie la relation suivante: $f'(t) + \frac{1}{5} f(t) = 4$.

1. Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement, la température du four est 1 00°C, c'est-à-dire que $f(0)$ = 1 000.
2. Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif t :
$$f(t) = 980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20.$$
   a. Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
   b. Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques?

3. Dans cette question, on s'intéresse à l'abaissement de température (en degré Celsius) du four au cours d'une heure, soit entre deux instants t et $(t+1)$. Cet abaissement est donné par la fonction d définie, pour tout nombre réel t positif, par : $d(t) = f(t) - f(t+1)$.
   a. Vérifier que, pour tout nombre réel t positif : $d(t) = 980(1 - e^{-\frac{t}{5}})\, e^{-\frac{t}{5}}$.
   b. A l'aide de la représentation graphique suivante, déterminer la limite de $d(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Quelle interprétation peut-on en donner ?