Séquence 5 : **Modèle d'évolution 2 - Évolution de population**

Contenus associés:

Notions	Notions antérieures
– **Suites arithmético-géométriques.** (étude approfondie) - **Équation différentielle 2** (y′ = ay + b, résolution théorique) – **Limites 3** (limites de suites, de fonctions composées solutions d'équations différentielles)	– Suites récurrentes. – Suites géométriques. – Fonction exponentielle.

<u>Évolution de la population des limicoles</u>

On s'intéresse à l'évolution du nombre de limicoles séjournant sur l'île de Ré à partir de 2015.
On a relevé le nombre d'oiseaux d'une espèce particulière, les limicoles, séjournant sur l'île de Ré.

Année	Effectif
2015	164
2016	148
2017	134
2018	121
2019	109

A - Modèle à évolution constante

1. Des scientifiques proposent d'après les données relevées, de modéliser l'évolution de la population de limicoles par une diminution annuelle de 10%.
   a. Que pensez-vous de cette proposition ?
   b. Définir une suite (p_n) correspondant à cette modélisation.
2. On considère l'algorithme ci-contre :

```python
def limicoles(S):
    P=148
    N=0
    while P >= S:
        P= 0.9*P
        N=N+1
    return N
```

   a. On saisit la valeur 75. Pour cette valeur de S, en suivant pas à pas l'algorithme précédent, recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire:

Valeur de P	148				...
Valeur de N	0				...
Test P ≥ N	vrai				...

   b. Quel nombre est affiché en sortie ? L'interpréter pour la situation étudiée.
3. **a.** On entre la valeur 1 pour S. Justifier que l'algorithme produit bien un affichage et interpréter ce résultat pour la situation étudiée.
   b. Que se passerait-il si on entrait 0 comme valeur de S ?

B - Avec introduction d'animaux

Au début de l'année 2020, la LPO a mis en place des mesures de protection des oiseaux et d'aménagement du territoire, ce qui a pour effet de limiter la diminution des effectifs à 6% par an.
Par ailleurs, la région décide de réintroduire 20 nouveaux oiseaux de cette espèce le 1er janvier de chaque année à partir de 2020.
Proposer un modèle mathématique qui permette le calcul de cette population pour toute année $2019 + n$ tant que l'évolution reste la même.
Peut-on prévoir à partir de ce modèle une stabilisation de la population ? Expliquer la démarche suivie.

Évolution de population

1. **Dans** un pays de population constante égale à 60 millions d'habitants, on compte 20 millions de citadins et 40 millions de ruraux en 2020. Les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville.
   On constate que les mouvements de population suivent la règle suivante : chaque année 10% des citadins émigrent en zone rurale et 20% des ruraux émigrent en zone urbaine.
   a. Ecrire une fonction permettant de calculer la population dans chaque zone après n années.
   b. Quelle évolution peut-on prévoir à long terme?

2. **Cas général**
   Dans un pays de population globale constante, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville.
   On constate que des ruraux émigrent en zone urbaine et des citadins émigrent en zone rurale.
   a. Ecrire une fonction qui retourne la population dans chaque zone après n années et qui prend comme arguments le nombre n, le nombre initial C_0 de citadins, le nombre initial R_0 de ruraux, la proportion TC % (supposée constante) des citadins qui émigrent en zone rurale annuellement et la proportion TR % (supposée constante) des ruraux qui émigrent en zone urbaine chaque année.
   b. Quelle évolution peut-on prévoir en 2030 dans un pays comptant, en 2019, 900 millions d'habitants dont 400 millions de citadins, dans lequel, chaque année, 20% des ruraux émigrent en zone urbaine et 5% des citadins émigrent en zone rurale ?

Le modèle de Malthus

Une première approche consiste à considérer que les ressources de la population étudiée sont illimitées. On fait alors l'hypothèse que l'accroissement de la population d'une année à l'autre est proportionnel à l'effectif de cette population.

1. **Modèle discret**
   Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n de l'étude (P_n est un réel positif). D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante réelle $k > 0$, dépendant des taux de mortalité et de natalité telle que, pour tout entier naturel n :
   $$P_{n+1} - P_n = kP_n$$
   a. Justifier que la suite ainsi définie est géométrique.
   b. Indiquer le sens de variation de la suite.
   c. Préciser la limite de la suite.
   d. Interpréter les résultats des questions b. et c. en termes d'évolution de population.

2. **Modèle continu**
   Soit $f(t)$ la population à l'instant t (on supposera f dérivable sur [0 ; + ∞[). On fait l'hypothèse suivante : pour tout instant t, le taux de variation de la population, $f'(t)$, est proportionnel à la population $f(t)$.
   On admet donc qu'il existe un réel strictement positif k tel que pour tout t qui appartient à [0 ; + ∞[,
   $$f'(t) = kf(t)$$
   a. Soit g la fonction définie sur [0;+ ∞[par $g(t) = f(t)e^{-kt}$.
   Montrer que g est dérivable sur [0;+ ∞[et calculer $g'(t)$.
   En déduire que g est constante sur [0;+ ∞[.
   b. Soit $a = f(0)$. Montrer que, pour tout t qui appartient à [0;+ ∞[, $f(t) = a\, e^{kt}$.
   Déterminer les variations de la fonction f.
   c. Préciser la limite de $f(t)$ en + ∞.
   d. Interpréter les résultats des questions b. et c. en termes d'évolution de population.

3. **Une application des modèles**
En 1960, la population mondiale était de 3 023 millions et, en 1961, elle a augmenté de 55 millions d'habitants.
a. À partir de ces données, déterminer :
- les valeurs de P_0 et de k du modèle discret ;
- les valeurs de a et de k du modèle continu.

b. Utiliser un tableur ou un grapheur afin de construire une représentation graphique des deux modèles, dans un même repère.
c. Voici les données de l'INSEE sur la population mondiale (estimations et projections de population en milieu d'année) :
En 1980 : 4 458 millions
En 1990 : 5 327,2 millions
En 2000 : 6 143,5 millions
En 2010 : 6 956,8 millions
En 2019 : 7 713,5 millions

Que pensez-vous des deux modèles ?
Tout type d'argumentation (graphique, numériques, estimation des erreurs relatives) pourra être considéré.

Etude d'une population de bactéries

On étudie une population de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$. Ce problème a pour objet l'étude de trois modèles d'évolution de cette population. Dans tout le problème, la population initiale sera de 1 million d'individus, et on exprimera le temps en heures, et la population de bactéries en millions d'individus.

Partie A - Un modèle discret

On suppose que la population double toutes les demi-heures.

1. Combien y-a-t-il de bactéries au bout d'une heure ? au bout de deux heures ?
2. Soit P_n le nombre d'individus au bout de n heures. Donner l'expression de P_n en fonction de n.
3. Au bout de combien d'heures la population dépasse-t-elle 100 millions d'individus ? Quelle est la limite de la suite (P_n) ?

Partie B - Un premier modèle continu

On s'intéresse à la population de bactéries à l'instant t. Pour faciliter le traitement mathématique, on la représente par une fonction continue et dérivable $f\ (t)$ (ceci malgré le fait qu'en toute rigueur, elle devrait être forcément un nombre décimal n'ayant pas plus de 6 décimales, puisqu'il y a un nombre entier de bactéries). On prend pour hypothèse dans ce premier modèle continu qu'à chaque instant, l'accroissement de la population par unité de temps, $f\ '\ (t)$, est proportionnel à la population. Cela revient à dire qu'il existe un coefficient a strictement positif et invariant au cours du temps tel que $f'(t) = a\ f\ (t)$.

1. **a.** Déterminer l'expression d'une fonction non nulle solution de l'équation différentielle $y\ ' = ay$.
b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y\ ' = ay$ et exprimer $f(t)$ en prenant en compte la population initiale.
c. On suppose que la population double toutes les demi-heures. À l'aide de la calculatrice, en déduire une valeur approchée à 10^{-1} près de la valeur de a.
2. On suppose désormais que la population à l'instant t est : $f\ (t) = e^{1,38 \times t}$.
a. Dans ce modèle, combien y a-t-il de bactéries au bout de 10 minutes, au bout de 1 h 40 ? Quelle est la limite de $f\ (t)$ en $+\infty$?
b. Si l'instant initial était midi, à quelle heure, à la minute près, la population atteindrait-elle 100 millions ?
c. Comparer $f\ (n)$ et P_n. Qu'apporte cette deuxième modélisation par rapport à la première ? (On

peut comparer les questions posées dans A et dans B pour évaluer les « performances »de chaque modélisation).