NOMBRES ET CALCULS EN CINQUIEME

Ce document est une compilation des aménagements des programmes (BO 30 du 28 juillet 2018), des repères de progression et des attendus de fin d'année (note de service n° 2019-072 du 28-5-2019). Il vise à proposer une référence unique pour les enseignants de collège par thème et par année.

Programme :

Au cycle 4, les élèves consolident le sens des nombres et confortent la maîtrise des procédures de calcul, sans objectif de virtuosité technique. Ils manipulent des nombres rationnels de signe quelconque. Ils utilisent les différentes écritures d'un même nombre (fractionnaire, décimale, notation scientifique). Les puissances sont introduites pour faciliter l'évaluation d'ordres de grandeurs (notamment en relation avec d'autres disciplines) et la simplification de certaines écritures.

Les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour modéliser une situation, démontrer une propriété générale et résoudre des problèmes se ramenant à des équations du premier degré. Les élèves sont progressivement familiarisés aux différents statuts de la lettre (indéterminée, variable, inconnue, paramètre) et du signe égal (pour fournir le résultat d'une opération, pour traduire l'égalité de deux représentations d'un même nombre, dans une équation, dans une identité). À l'occasion d'activités de recherche, ils peuvent rencontrer des nombres irrationnels, par exemple dans l'utilisation du théorème de Pythagore ou la résolution d'équations de la forme $x^2 = a$.

Croisements entre enseignements

Si les mathématiques sont une science à part entière avec son propre langage et une démarche spécifique de preuve basée, non pas sur la confrontation au réel, mais sur la démonstration, elles sont également intimement liées aux autres disciplines. Elles fournissent en effet des outils de calcul et de représentation et des modèles qui permettent de traiter des situations issues de toutes les autres disciplines enseignées au cycle 4. De ce fait, les mathématiques ont également toute leur place dans les enseignements pratiques interdisciplinaires qui contribuent à faire percevoir aux élèves leur dimension créative, inductive et esthétique et à éprouver le plaisir de les pratiquer.

1. NOMBRES DECIMAUX RELATIFS

Nombres

Connaissances

- nombres décimaux (positifs et négatifs), notion d'opposé.

Compétences associées

- utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ;
- passer d'une représentation d'un nombre à une autre.

Comparaisons de nombres

Connaissances

- ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire.

Compétences associées

- comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels en écriture décimale, fractionnaire ou scientifique.

Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté

Connaissances

- somme, différence, produit, quotient de nombres décimaux.

Compétences associées

- calculer avec des nombres relatifs, des nombres décimaux ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur ;
- effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes.

1.1 REPERES DE PROGRESSION

Le travail mené au cycle 3 sur l'enchaînement des opérations, les comparaisons et le repérage sur une droite graduée de nombres décimaux positifs est poursuivi. Les nombres relatifs (d'abord entiers, puis décimaux) sont construits pour rendre possibles toutes les soustractions. La notion d'opposé est introduite, l'addition et la soustraction sont étendues aux nombres décimaux (positifs ou négatifs). Il est possible de mettre en évidence que soustraire un nombre revient à additionner son opposé, en s'appuyant sur des exemples à valeur générique du type : $3{,}1 - (-2) = 3{,}1 + 0 - (-2) = 3{,}1 + 2 + (-2) - (-2)$, donc $3{,}1 - (-2) = 3{,}1 + 2 + 0 = 3{,}1 + 2 = 5{,}1$.

1.2 ATTENDUS DE FIN D'ANNEE

Nombres

Ce que sait faire l'élève :

- Il utilise, dans le cas des nombres décimaux, les écritures décimales et fractionnaires et passe de l'une à l'autre, en particulier dans le cadre de la résolution de problèmes.
- Il utilise la notion d'opposé.

Exemples de réussite :

- Il détermine l'opposé d'un nombre relatif.
- Il sait que soustraire revient à additionner l'opposé.

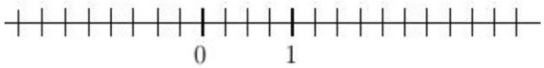
Comparaison de nombres

Ce que sait faire l'élève :

- Il repère sur une droite graduée les nombres décimaux relatifs.

Exemples de réussite :

- Place sur la droite graduée les nombres suivants :
  $\frac{9}{4}$; 0,25 ; -0,75 ; $\frac{5}{4}$; 2,75 ; $\frac{5}{2}$; -1,25.



Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.

Ce que sait faire l'élève :

- Il traduit un enchaînement d'opérations à l'aide d'une expression avec des parenthèses.
- Il effectue mentalement, à la main ou l'aide d'une calculatrice un enchaînement d'opérations en respectant les priorités opératoires.
- Il additionne et soustrait des nombres décimaux relatifs.
- Il contrôle la vraisemblance d'un résultat.
- Il résout des problèmes faisant intervenir des nombres décimaux relatifs.

Exemples de réussite :

Ajouter 3
Multiplier par 9
Soustraire 5

- Pour appliquer le programme de calcul ci-contre au nombre 7, il effectue le calcul (7 + 3) × 9 - 5.
- Calcule mentalement : 5 + 3 × 4 ; 10 - (1 + 6) ; 12 - 8 + 2.
  Calcule à la main : 5,5 + 6 × 2,4 ; 12 - (5,3 + 3,8) ; 16,2 - 9,4 + 3,8.
  Effectue : (7 + 3) × 9 - 5.
- Il vérifie ses résultats à l'aide de la calculatrice.
- Calcule mentalement : -9 + 6 ; -5,6 – 3 ; 4 – 9 ; -12 - (-2).
- Il exclut des réponses aberrantes à un problème donné, par exemple 8,12 m pour la taille d'une personne ou 15 cm^2 pour l'aire d'un champ.

2. FRACTIONS, NOMBRES RATIONNELS

Nombres

Connaissances

- fractions, nombres rationnels (positifs et négatifs) […].

Compétences associées

- utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, […], repérage sur une droite graduée) ;
- passer d'une représentation d'un nombre à une autre.

Comparaisons de nombres

Connaissances

- égalité de fractions (démonstration possible à partir de la définition du quotient) ;
- ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire.

Compétences associées

- comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels en écriture décimale, fractionnaire […] ;
- repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée.

Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté

<u>Connaissances</u>

- somme, différence [...] de deux nombres rationnels.

<u>Compétences associées</u>

- calculer avec des nombres relatifs, des fractions ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur ;
- effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes.

2.1 REPERES DE PROGRESSION

La conception d'une fraction en tant que nombre, déjà abordée en sixième, est consolidée. Les élèves sont amenés à reconnaître et à produire des fractions égales (sans privilégier de méthode en particulier), à comparer, additionner et soustraire des fractions dont les dénominateurs sont égaux ou multiples l'un de l'autre.

Au moins une des propriétés suivantes est démontrée, à partir de la définition d'un quotient :

- $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$
- $a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$
- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
- $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Il est possible, à ce niveau, de se limiter à des exemples à valeur générique. Cependant, le professeur veille à spécifier que la vérification d'une propriété, même sur plusieurs exemples, n'en constitue pas une démonstration.

Exemple de calcul fractionnaire permettant de démontrer que $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.

On commence par calculer $\frac{2}{3} \times 15$: $\quad \frac{2}{3} \times 15 = \frac{2}{3} \times 3 \times 5$.

La définition du quotient permet de simplifier par 3, puisque $\frac{2}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3, donne 2.

Donc $\frac{2}{3} \times 15 = 2 \times 5 = 10$.

Par définition du quotient, il vient donc $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$, puisque $\frac{2}{3}$ multiplié par 15 donne 10.

2.2 ATTENDUS DE FIN D'ANNEE

Nombres

Ce que sait faire l'élève :

- Il utilise, dans le cas des nombres décimaux, les écritures décimales et fractionnaires et passe de l'une à l'autre, en particulier dans le cadre de la résolution de problèmes.
- Il relie fractions, proportions et pourcentages.
- Il décompose une fraction sous la forme d'une somme (ou d'une différence) d'un entier et d'une fraction.

Exemples de réussite :

- Il exprime le nombre $2{,}5 + \frac{23}{100} + \frac{7}{5}$ sous formes décimale et fractionnaire.
- Pour calculer 20 % de 70 €, il effectue $\frac{20}{100} \times 70$ ou $0{,}2 \times 70$.

- Il décompose : $\frac{15}{7} = 2 + \frac{1}{7}$ ou $\frac{15}{7} = 3 - \frac{6}{7}$.

Comparaison de nombres

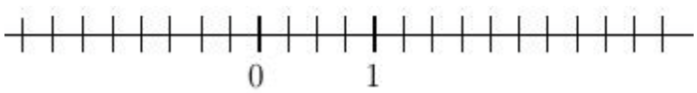
Ce que sait faire l'élève :

- Il reconnaît et produit des fractions égales.
- Il compare, range, encadre des fractions dont les dénominateurs sont égaux ou multiples l'un de l'autre.

Exemples de réussite.

- Dans la liste suivante, entoure toutes les fractions égales à $\frac{14}{6}$: $\frac{28}{6}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{140}{60}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{56}{24}$.
- Il simplifie $\frac{39}{12}$.
- Il range dans l'ordre croissant : $\frac{1}{3}$; $\frac{25}{6}$; 2 ; $\frac{5}{3}$.
- Complète les encadrements suivants par deux entiers consécutifs : … < $\frac{15}{7}$ < … et … < $\frac{-20}{3}$ < … .
- Place sur la droite graduée les nombres suivants :

$\frac{9}{4}$; 0,25 ; -0,75 ; $\frac{5}{4}$; 2,75 ; $\frac{5}{2}$; -1,25.



Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.

Ce que sait faire l'élève :

- Il additionne ou soustrait des fractions dont les dénominateurs sont égaux ou multiples l'un de l'autre.
- Il contrôle la vraisemblance d'un résultat.
- Il résout des problèmes faisant intervenir des nombres décimaux relatifs et des fractions.

Exemples de réussite :

- Il calcule, sans passer par l'écriture décimale :

$\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$; $\frac{23}{10} - \frac{5}{10}$; $\frac{3}{7} - \frac{2}{7}$; $\frac{5}{12} + \frac{4}{3}$; $\frac{11}{9} - \frac{1}{3}$; $\frac{5}{2} - \frac{1}{4}$.

3. DIVISIBILITE, NOMBRES PREMIERS

Connaissances

- multiples et diviseurs ;
- critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 ;
- division euclidienne (quotient, reste) ;
- définition d'un nombre premier ; liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30 ;
- fractions irréductibles.

Compétences associées

- déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier ;
- déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à [30] ;
- utiliser les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10 ;
- déterminer les diviseurs d'un nombre à la main, à l'aide d'un tableur, d'une calculatrice ;
- décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers (à la main ou à l'aide d'un logiciel) ;
- modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité (engrenages, conjonction de phénomènes, etc.).

3.1 REPERES DE PROGRESSION

Tout au long du cycle, les élèves sont amenés à modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité et les nombres premiers.

Le travail sur les multiples et les diviseurs, déjà abordé au cycle 3, est poursuivi. Il est enrichi par l'introduction de la notion de nombre premier. Les élèves se familiarisent avec la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30. Ceux-ci sont utilisés pour la décomposition en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est utilisée pour reconnaître et produire des fractions égales.

3.2 ATTENDUS DE FIN D'ANNEE

Ce que sait faire l'élève :

- Il calcule le quotient et le reste dans une division euclidienne.
- Il détermine si un nombre entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre nombre entier.
- Il détermine les nombres premiers inférieurs ou égaux à 30.
- Il utilise les critères de divisibilité (par 2, 3, 5, 9, 10).
- Il décompose un nombre entier strictement positif en produit de facteurs premiers inférieurs à 30.
- Il utilise la décomposition en facteurs premiers inférieurs à 30 pour produire des fractions égales (simplification ou mise au même dénominateur).
- Il modélise et résout des problèmes faisant intervenir les notions de multiple, de diviseur, de quotient et de reste.

Exemples de réussite :

- 147 élèves sont répartis par équipe de 16 pour un concours. Combien d'équipes entières peut-on constituer ? Combien manquerait-il d'élèves pour constituer la dernière équipe ?
- Il identifie les multiples de 14 parmi les nombres suivants : 56 ; 141 ; 280.
- Il dresse la liste des diviseurs de 28.
- Il retrouve la liste des nombres premiers inférieurs à 30.
- Il détermine, parmi les nombres 2, 3, 5, 9 et 10, les diviseurs de 456 et 1980.
- Il décompose 84 en produit de facteurs premiers.
- Il utilise la décomposition en produit de facteurs premiers pour simplifier $\frac{153}{85}$.

Problèmes faisant intervenir les notions de multiple, de diviseur, de quotient et de reste

- Un garçon de café doit répartir 36 croissants et 24 pains au chocolat dans des corbeilles. Chaque corbeille doit avoir le même contenu. Quelles sont les répartitions possibles ?
- Un bibliothécaire doit répartir 420 livres sur des étagères. Chaque étagère doit contenir le même nombre de livres.

  Est-ce possible avec 18 étagères ? Avec 21 étagères ?

4. CALCUL LITTERAL

Connaissances

- notions d'inconnue, d'équation […];
- propriété de distributivité (simple) ;

Compétences associées

- développer, factoriser, réduire des expressions algébriques dans des cas très simples ;
- utiliser le calcul littéral pour traduire une propriété générale (par exemple la distributivité simple), pour démontrer un résultat général (par exemple que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de trois), pour valider ou réfuter une conjecture, pour modéliser une situation ;
- mettre un problème en équation en vue de sa résolution ;

Il est attendu de démontrer au moins une propriété du calcul fractionnaire en utilisant le calcul littéral et la définition du quotient.

4.1 REPERES DE PROGRESSION

Expressions littérales.

Les expressions littérales sont introduites à travers des formules mettant en jeu des grandeurs ou traduisant des programmes de calcul. L'usage de la lettre permet d'exprimer un résultat général (par exemple qu'un entier naturel est pair ou impair) ou de démontrer une propriété générale (par exemple que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3). Les notations du calcul littéral (par exemple $2a$ pour $a \times 2$ ou $2 \times a$, ab pour $a \times b$) sont progressivement utilisées, en lien avec les propriétés de la multiplication.

Les élèves substituent une valeur numérique à une lettre pour calculer la valeur d'une expression littérale.

Distributivité.

Tôt dans l'année, sans attendre la maîtrise des opérations sur des nombres relatifs, la propriété de distributivité simple est utilisée pour réduire une expression littérale de la forme $ax + bx$, où a et b sont des nombres décimaux.

Le lien est fait avec des procédures de calcul numérique déjà rencontres au cycle 3 (calculs du type 12×50 ; 37×99 ; $3 \times 23 + 7 \times 23$).

Equations.

Les élèves sont amenés à tester si une égalité où figure une lettre est vraie lorsqu'on lui attribue une valeur numérique.

Les élèves testent des égalités par essais erreurs, à la main ou à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, des valeurs numériques dans des expressions littérales, ce qui constitue une première approche de la notion de solution d'une équation, sans formalisation à ce stade.

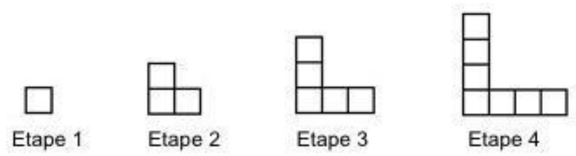
4.2 ATTENDUS DE FIN D'ANNEE

Ce que sait faire l'élève :

- Il utilise les notations $2a$ pour $a \times 2$ ou $2 \times a$ et ab pour $a \times b$, a^2 pour $a \times a$ et a^3 pour $a \times a \times a$.
- Il utilise la distributivité simple pour réduire une expression littérale de la forme $ax + bx$ où a et b sont des nombres décimaux.
- Il produit une expression littérale pour élaborer une formule ou traduire un programme de calcul.
- Il utilise une lettre pour traduire des propriétés générales.
- Il utilise une lettre pour démontrer une propriété générale.
- Il substitue une valeur numérique à une lettre pour :
  - calculer la valeur d'une expression littérale ;
  - tester, à la main ou de façon instrumentée, si une égalité où figurent une ou deux indéterminées est vraie quand on leur attribue des valeurs numériques ;
  - contrôler son résultat.

Exemples de réussite :

- Il simplifie l'écriture des expressions suivantes : $5 \times a + 3 \times b$; $x \times y$; $2 \times l + 2 \times L$; $2 \times \pi \times r$; $\pi \times r \times r$; $c \times c \times c$; $3{,}2 \times x \times 3 \times x$; $4x \times 2x \times 3x$.
- Il réduit des expressions du type : $5{,}2x + 3{,}4x$; $2{,}4x - 2{,}1x$.
- Élabore une formule permettant de calculer le nombre de carrés à partir du nombre d'étapes :



- Exprime en fonction du nombre initial le programme de calcul suivant :
- « Choisir un nombre ; lui ajouter 2 ; multiplier le résultat par 3 ; enlever 6 ».
- Il exprime de façon littérale l'entier qui suit un entier n, ou l'entier qui le précède.
- Il écrit la forme générale d'un multiple de 3, des nombres entiers naturels pairs et impairs.
- Il démontre que la somme de deux entiers consécutifs est impaire.
- Il démontre que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
- Il calcule mentalement $7a$ et $a + 17$ pour $a = 8$.
- Il calcule mentalement $3x + 5y$ pour $x = 2$ et $y = 1$.
- Il fait un test numérique pour montrer que les expressions $4 + 3x$ et $7x$ ne sont pas égales.
- Il utilise une calculatrice pour vérifier ses calculs et ses tests numériques.