

NOMBRES ET CALCULS EN QUATRIEME

Ce document est une compilation des aménagements des programmes (BO 30 du 28 juillet 2018), des repères de progression et des attendus de fin d'année (note de service n° 2019-072 du 28-5-2019). Il vise à proposer une référence unique pour les enseignants de collège par thème et par année.

1.	Nombres décimaux relatifs	2
1.1	Repères de progression	3
1.2	Attendus de fin d'année	3
2.	Fractions, nombres rationnels	3
2.1	Repères de progression	4
2.2	Attendus de fin d'année	4
3.	Racine Carrée	4
3.1	Repères de progression	5
3.2	Attendus de fin d'année	5
4.	Puissances	5
4.1	Repères de progression	6
4.2	Attendus de fin d'année	6
5.	Divisibilité, nombres premiers	7
5.1	Repères de progression	7
5.2	Attendus de fin d'année	7
6.	Calcul littéral	8
6.1	Repères de progression	8
6.2	Attendus de fin d'année	9

Programme :

Au cycle 4, les élèves consolident le sens des nombres et confortent la maîtrise des procédures de calcul, sans objectif de virtuosité technique. Ils manipulent des nombres rationnels de signe quelconque. Ils utilisent les différentes écritures d'un même nombre (fractionnaire, décimale, notation scientifique). Les puissances sont introduites pour faciliter l'évaluation d'ordres de grandeurs (notamment en relation avec d'autres disciplines) et la simplification de certaines écritures.

Les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour modéliser une situation, démontrer une propriété générale et résoudre des problèmes se ramenant à des équations du premier degré. Les élèves sont progressivement familiarisés aux différents statuts de la lettre (indéterminée, variable, inconnue, paramètre) et du signe égal (pour fournir le résultat d'une opération, pour traduire l'égalité de deux représentations d'un même nombre, dans une équation, dans une identité). À l'occasion d'activités de recherche, ils peuvent rencontrer des nombres irrationnels, par exemple dans l'utilisation du théorème de Pythagore ou la résolution d'équations de la forme $x^2 = a$.

Croisements entre enseignements

Si les mathématiques sont une science à part entière avec son propre langage et une démarche spécifique de preuve basée, non pas sur la confrontation au réel, mais sur la démonstration, elles sont également intimement liées aux autres disciplines. Elles fournissent en effet des outils de calcul et de représentation et des modèles qui permettent de traiter des situations issues de toutes les autres disciplines enseignées au cycle 4. De ce fait, les mathématiques ont également toute leur place dans les enseignements pratiques interdisciplinaires qui contribuent à faire percevoir aux élèves leur dimension créative, inductive et esthétique et à éprouver le plaisir de les pratiquer.

1. NOMBRES DECIMAUX RELATIFS

Nombres

Connaissances

- nombres décimaux (positifs et négatifs), notion d'opposé.

Compétences associées

- utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ;
- passer d'une représentation d'un nombre à une autre.

Comparaisons de nombres

Connaissances

- ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire.

Compétences associées

- comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels en écriture décimale, fractionnaire ou scientifique.

Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté

Connaissances

- somme, différence, produit, quotient de nombres décimaux [...].

Compétences associées

- calculer avec des nombres relatifs, [...] des nombres décimaux ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur ;
- effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes.

1.1 REPERES DE PROGRESSION

Le produit et le quotient de décimaux relatifs sont abordés.

1.2 ATTENDUS DE FIN D'ANNEE

Nombres

Ce que sait faire l'élève.

- Il associe, dans le cas des nombres décimaux, écriture décimale, écriture fractionnaire et notation scientifique.

Exemples de réussite.

- Il établit des correspondances du type : $\frac{783}{1\,000\,000} = 0,000\,783$.

Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.

Ce que sait faire l'élève.

- Il effectue, avec des nombres décimaux relatifs, des produits et des quotients.

Exemples de réussite.

- Il calcule mentalement : -7×3 ; $-2,5 \times (-4)$; $2,4 \times (-0,5)$; $-12,8 \div 2$; $-63 \div (-0,7)$; $7,2 \div (-5)$.
- Il détermine le signe de $(-6,7) \times 7 \times (-1,24) \times (-0,7)$ et $\frac{11,4 \times (-3,5)}{-(5,6 \times 123)}$, il vérifie le signe et effectue le calcul en utilisant une calculatrice.
- Il vérifie ses résultats à l'aide d'une calculatrice.

2. FRACTIONS, NOMBRES RATIONNELS

Nombres

Connaissances

- fractions, nombres rationnels (positifs et négatifs), notion d'inverse.

Compétences associées

- utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ;
- passer d'une représentation d'un nombre à une autre.

Comparaisons de nombres

Connaissances

- égalité de fractions (démonstration possible à partir de la définition du quotient) ;
- ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire.

Compétences associées

- comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels en écriture décimale, fractionnaire ou scientifique ;
- repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée.

Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté

Connaissances

- somme, différence, produit, quotient de deux nombres rationnels.

Compétences associées

- calculer avec des nombres relatifs, des fractions, des nombres décimaux ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur ;
- effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes.

2.1 REPERES DE PROGRESSION

Un nombre rationnel est défini comme quotient d'un entier relatif par un entier relatif non nul, ce qui renvoie à la notion de fraction.

Le quotient de deux nombres décimaux peut ne pas être un nombre décimal.

La notion d'inverse est introduite, les opérations entre fractions sont étendues à la multiplication et la division. Les élèves sont conduits à comparer des nombres rationnels, à en utiliser différentes représentations et à passer de l'une à l'autre.

Une ou plusieurs démonstrations de calculs fractionnaires sont présentées. Le recours au calcul littéral vient compléter pour tout ou partie des élèves l'utilisation d'exemples à valeurs génériques.

2.2 ATTENDUS DE FIN D'ANNEE

Nombres

Ce que sait faire l'élève.

- Il associe, dans le cas des nombres décimaux, écriture fractionnaire et notation scientifique.

Exemples de réussite.

- Il établit des correspondances du type : $\frac{783}{1\,000\,000} = 0,000\,783 = 7,83 \times 10^{-4}$.

Comparaison de nombres

Ce que sait faire l'élève.

- Il compare, range et encadre des nombres rationnels (positifs ou négatifs).

Exemples de réussite.

- Il complète par $>$, $<$ ou $=$: $\frac{5}{18} \dots \frac{7}{12}$; $\frac{5}{12} \dots \frac{4}{3}$; $-3 \dots -\frac{22}{7}$.

Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.

Ce que sait faire l'élève.

- Il calcule avec les nombres rationnels : addition, soustraction, multiplication, division.
- Il utilise l'inverse pour calculer.
- Il résout des problèmes avec des nombres rationnels.
- Il utilise des ordres de grandeur pour vérifier ses résultats.

Exemples de réussite.

- Il détermine le signe de $[...] \frac{11,4 \times (-3,5)}{-(5,6 \times 123)}$, il vérifie le signe et effectue le calcul en utilisant une calculatrice.
- Il calcule mentalement : $\frac{5}{2} \times \frac{-7}{3}$; $-7 \times \frac{8}{5}$; $-\frac{3}{7} \times \frac{14}{-5}$; $\frac{5}{9} \div \frac{1}{2}$.
- Il calcule à la main : $\frac{5}{3} - 6 \times \frac{1}{5}$; $\frac{7}{6} - (\frac{-1}{2} + \frac{1}{3})$; $\frac{-7}{4} + \frac{1}{9} \div 4$.
- Il vérifie ses résultats à l'aide d'une calculatrice.

3. RACINE CARREE

Nombres

Connaissances

- Les carrés parfaits de 1 à 144 ;
- Définition de la racine carrée.

Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.

Compétences associées

- Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur ;
- Utiliser la racine carrée pour résoudre des problèmes, notamment géométriques.
- Effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes.

3.1 REPERES DE PROGRESSION

La racine carrée est introduite, en lien avec des situations géométriques (théorème de Pythagore, agrandissement des aires) et à l'appui de la connaissance des carrés parfaits de 1 à 144 et de l'utilisation de la calculatrice.

3.2 ATTENDUS DE FIN D'ANNEE

Nombres

Ce que sait faire l'élève.

- Il utilise les carrés parfaits de 1 à 144.
- Il connaît la définition de la racine carrée d'un nombre positif.

Exemples de réussite.

- Il connaît les égalités du type : $11^2 = 121$ et $\sqrt{81} = 9$.

Comparaison de nombres

Ce que sait faire l'élève.

- Il encadre la racine carrée d'un nombre positif entre deux entiers.

Exemples de réussite.

- Il encadre $\sqrt{7}$ entre deux entiers consécutifs sans en chercher une valeur approchée.

Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.

Ce que sait faire l'élève.

- Il utilise la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif.
- Il utilise la racine carrée d'un nombre positif en lien avec des situations géométriques (théorème de Pythagore ; agrandissement, réduction et aires).
- Il utilise les ordres de grandeur pour vérifier ses résultats.

Exemples de réussite.

- Il vérifie ses résultats à l'aide d'une calculatrice.
- A l'aide de sa calculatrice, il détermine que 2,65 est une valeur approchée au centième près de $\sqrt{7}$.
- Il détermine la valeur exacte et une valeur approchée du périmètre d'un carré d'aire 15 cm^2 .
- Il estime mentalement que l'aire d'un disque de rayon 2cm est proche de 12 cm^2 .

4. PUISSANCES

Nombres

Connaissances

- Les préfixes de nano à giga.

Compétences associées

- Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ;
- Passer d'une représentation d'un nombre à une autre.

Comparaisons de nombres

Compétences associées

- Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels en écriture décimale, fractionnaire ou scientifique ;
- Associer à des objets des ordres de grandeur (par exemple la taille d'un atome, d'une bactérie, d'une alvéole pulmonaire, longueur de l'intestin, capacité de stockage d'un disque dur, vitesses du son et de la lumière, populations française et mondiale, distance Terre-Lune, distance du Soleil à l'étoile la plus proche, etc.).

Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.

Connaissances

- Puissance d'un nombre (exposants entiers, positifs ou négatifs) ;
- Notation scientifique.

Compétences associées

- Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur ;
- Effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances, notamment en utilisant la notation scientifique ;
- Effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes.

La mise en acte de produits et de quotients de puissances de même base résulte de l'application de la définition plutôt que de celle d'une formule.

4.1 REPERES DE PROGRESSION

Les puissances de 10 sont d'abord introduites avec des exposants positifs, puis négatifs, afin de définir les préfixes de nano à giga et la notation scientifique. Celle-ci est utilisée pour comparer des nombres et déterminer des ordres de grandeurs, en lien d'autres disciplines. Les puissances de base quelconque d'exposants positifs sont introduites pour simplifier l'écriture de produits.

La connaissance des formules générales sur les produits ou quotients de puissances de 10 n'est pas un attendu du programme : la mise en œuvre des calculs sur les puissances découle de leur définition.

4.2 ATTENDUS DE FIN D'ANNEE

Nombres

Ce que sait faire l'élève.

- Il utilise les puissances de 10 d'exposants positifs ou négatifs.
- Il associe, dans le cas des nombres décimaux, écriture décimale, écriture fractionnaire et notation scientifique.
- Il utilise les préfixes de nano à giga.
- Il utilise les puissances d'exposants strictement positifs d'un nombre pour simplifier l'écriture des produits.

Exemples de réussite.

- Il établit des correspondances du type : $10^4 = 10\,000$ et $10^{-3} = \frac{1}{1\,000} = 0,001$.
- Il établit des correspondances du type : $3\,900\,000\,000 = 3,9 \times 10^9$ et $\frac{783}{1\,000\,000} = 0,000\,783 = 7,83 \times 10^{-4}$.
- Il établit des correspondances du type : 3 microlitres = 3×10^{-6} litre ou 7 mégamètres = 7×10^6 mètres.
- Complète l'égalité suivante : $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^{\dots}$.

Comparaison de nombres

Ce que sait faire l'élève.

- Il utilise des puissances de 10 pour comparer des nombres.
- Il associe à des objets des ordres de grandeur en lien avec d'autres disciplines.

Exemples de réussite.

- Il compare des très grands ou très petits nombres positifs en utilisant l'écriture scientifique.
- Il résout des problèmes faisant intervenir la taille d'un atome, d'une bactérie, d'une alvéole pulmonaire, la distance Terre-Lune, la longueur d'une piscine olympique ...

Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.

Ce que sait faire l'élève.

- Il utilise les ordres de grandeur pour vérifier ses résultats.

Exemples de réussite.

- Il vérifie ses résultats à l'aide d'une calculatrice.

5. DIVISIBILITE, NOMBRES PREMIERS

Connaissances

- multiples et diviseurs ;
- critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 ;
- division euclidienne (quotient, reste) ;
- définition d'un nombre premier ; liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30 ;
- fractions irréductibles.

Compétences associées

- déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier ;
- déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 ;
- utiliser les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10 ;
- déterminer les diviseurs d'un nombre à la main, à l'aide d'un tableur, d'une calculatrice ;
- décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers (à la main [...]) ;
- modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité (engrenages, conjonction de phénomènes, etc.).

5.1 REPERES DE PROGRESSION

Tout au long du cycle, les élèves sont amenés à modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité et les nombres premiers.

Les élèves déterminent la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 et l'utilisent pour décomposer des nombres en facteurs premiers, reconnaître et produire des fractions égales, simplifier des fractions.

5.2 ATTENDUS DE FIN D'ANNEE

Ce que sait faire l'élève.

- Il détermine la liste des nombres premiers inférieurs à 100.
- Il décompose un nombre entier en produit de facteurs premiers.
- Il utilise les nombres premiers inférieurs à 100 pour :
 - reconnaître et produire des fractions égales ;
 - simplifier des fractions.

- Il modélise et résout des problèmes simples mettant en jeu les notions de divisibilité et de nombre premier.

Exemples de réussite :

- Énumère tous les nombres premiers compris entre 50 et 70.
- Il décompose 780 en produit de facteurs premiers.
- Il reconnaît les fractions égales parmi les suivantes sans utiliser de calculatrice :
 $\frac{14}{49}$; $\frac{22}{55}$; $\frac{34}{85}$; $\frac{62}{155}$.
- Il simplifie $\frac{140}{135}$.
- Un fleuriste doit réaliser des bouquets tous identiques. Il dispose pour cela de 434 roses et 620 tulipes. Quelles sont toutes les compositions de bouquets possibles ?

6. CALCUL LITTÉRAL

Connaissances

- notions d'inconnue, d'équation, d'indéterminée, d'identité ;
- propriété de distributivité simple ;

Compétences associées

- développer, factoriser, réduire des expressions algébriques dans des cas très simples ;
- utiliser le calcul littéral pour traduire une propriété générale (par exemple la distributivité simple), pour démontrer un résultat général (par exemple que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de trois), pour valider ou réfuter une conjecture, pour modéliser une situation ;
- mettre un problème en équation en vue de sa résolution ;
- résoudre algébriquement des équations du premier degré.

Il est attendu de démontrer au moins une propriété du calcul fractionnaire en utilisant le calcul littéral et la définition du quotient.

À l'issue d'activités rituelles de calcul et de verbalisation de procédures et la résolution de problèmes, menées tout au long du cycle, d'abord dans le cadre numérique, puis dans le cadre algébrique, les élèves doivent avoir mémorisé ou automatisé :

- les règles de calcul sur les nombres relatifs et les fractions, notamment la condition d'égalité de deux fractions (si $ad = bc$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et réciproquement) ;
- les conventions d'écritures du calcul littéral les formules de distributivité simple et double ;
- les procédures de résolution d'équations du type $ax = b$ et $a + x = b$.

6.1 REPERES DE PROGRESSION

Expressions littérales.

Le travail sur les formules est poursuivi, parallèlement à la présentation de la notion d'identité (égalité vraie pour toute valeur des indéterminées).

La notion de solution d'une équation est formalisée.

Distributivité.

La structure d'une expression littérale (somme ou produit) est étudiée. La propriété de distributivité simple est formalisée et est utilisée pour développer un produit, factoriser une somme, réduire une expression littérale.

Equations.

Les notions d'inconnue et de solution d'une équation sont abordées. Elles permettent d'aborder la mise en équation d'un problème et la résolution algébrique d'une équation du premier degré.

Les équations sont travaillées tout au long de l'année par un choix progressif des coefficients de l'équation.

6.2 ATTENDUS DE FIN D'ANNEE

Ce que sait faire l'élève :

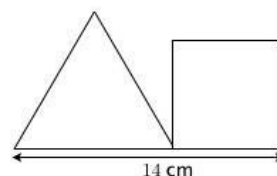
- Il identifie la structure d'une expression littérale (somme, produit).
- Il utilise la propriété de distributivité simple pour développer un produit, factoriser une somme ou réduire une expression littérale.
- Il démontre l'équivalence de deux programmes de calcul.
- Il introduit une lettre pour désigner une valeur inconnue et met un problème en équation.
- Il teste si un nombre est solution d'une équation.
- Il résout algébriquement une équation du premier degré.

Exemples de réussite :

- Il identifie $3x + 12$ comme une somme et $3(x + 4)$ comme un produit.
- Il développe et réduit les expressions suivantes : $3(4x - 2)$; $3x(4 + 8x)$; $17x + 4x(5 - x)$; $6(3 - 1,5x) - 9x$.
- Il factorise les expressions suivantes : $12x - 30$; $15x^2 + 18x$; $27x^2 + 3$.
- Compare les programmes de calcul suivants :
 - choisir un nombre, le tripler puis ajouter 15 au résultat ;
 - choisir un nombre, lui ajouter 5 puis multiplier le résultat par 3.

- Il met en équation le problème suivant :
On juxtapose un triangle équilatéral et un carré comme schématisé ci-contre.

Est-il possible que le triangle et le carré aient le même périmètre ?



- 4 est-il solution des équations suivantes ?

$$3x + 2 = 8 ; 5x - 6 = 3x + 2 ; x^2 - 9 = 3x - 5 ; \frac{x-1}{12} = \frac{1}{4}.$$

- Il résout les équations du type :
 $4x + 2 = 0$; $5x - 7 = 3$; $2x + 5 = -x - 4$.