Atelier « Raisonnement et démonstrations »

I. « Raisonnement et démonstrations » au cycle 4

II. Le raisonnement au lycée

- La compétence Raisonner
- Vers la formalisation
- La place de l'oral
- La trace écrite

III. Mise en œuvre

- Travail sur les items du paragraphe « Vocabulaire ensembliste et logique »
- Les démonstrations

I. « Raisonnement et démonstrations » au cycle 4

Extraits du programme du cycle 4 :

- La **formation au raisonnement et l'initiation à la démonstration** sont des objectifs essentiels du cycle 4.

- **Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées**

- Les **pratiques d'investigation** (essai-erreur, conjecture-validation, etc.) sont essentielles.

Il est important de ménager une progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et de ne pas avoir trop d'exigences concernant le formalisme.

I. « Raisonnement et démonstrations » au cycle 4

Extraits du programme du cycle 4 :

- **Travailler la compétence Raisonner**

✓ Résoudre des problèmes : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions.

✓ Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.

✓ Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion.

✓ Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.

I. « Raisonnement et démonstrations » au cycle 4

- **Initier** les élèves à la démonstration, conduire **sans formalisme** des raisonnements géométriques simples

Conclusion : **Raisonnement déductif initié, non formalisé**

Voir document **: Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège**

- Raisonnement et démonstration -

II. Le raisonnement au lycée
La compétence « Raisonner » au Lycée

Extrait du document : Les compétences mathématiques au lycée GT

Raisonner

- Utiliser les notions de la logique élémentaire (conditions nécessaires ou suffisantes, équivalences, connecteurs) pour bâtir un raisonnement.

- Différencier le statut des énoncés mis en jeu : définition, propriété, théorème démontré, théorème admis…

- Utiliser différents types de raisonnement (par analyse et synthèse, par équivalence, par disjonction de cas, par l'absurde, par contraposée, par récurrence…).

- Effectuer des inférences (inductives, déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision.

II. Le raisonnement au lycée
La compétence « Raisonner » au Lycée

Cadre de mise en œuvre

- La résolution de problèmes

- Travail sur les automatismes en lien avec les notions de logique et les différents types de raisonnement

- Les démonstrations exemplaires

II. Le raisonnement au lycée
Vers la formalisation

- Une part non négligeable des élèves arrivant en seconde sont **aptes à conduire des raisonnements sans pour autant les produire par écrit sous une forme aboutie.**

- Le travail fait sur la logique et le raisonnement au lycée a pour objectif de les conduire peu à peu à **mieux comprendre la logique mathématique et à s'approprier notations et vocabulaire**.

II. Le raisonnement au lycée
Vers la formalisation

Une rubrique « **Vocabulaire ensembliste et logique** » dans chaque programme:

- 2nde
- enseignement de spécialité de 1ère générale
- enseignement commun de 1ère technologique

➢ L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique ne doit pas faire l'objet de séquences spécifiques mais prend naturellement sa place dans tous les chapitres du programme

➢ Il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où il se présente naturellement, de prévoir des temps (lors des séances de cours, d'exercices, de recherche) où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation.

II. Le raisonnement au lycée
Vers la formalisation

Une rubrique « **Vocabulaire ensembliste et logique** » dans chaque programme:

- 2nde
- enseignement de spécialité de 1ère générale
- enseignement commun de 1ère technologique

- L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique ne doit pas faire l'objet de séquences spécifiques mais prend naturellement sa place dans tous les chapitres du programme

- Il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où il se présente naturellement, de prévoir des temps (lors des séances de cours, d'exercices, de recherche) où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation.

II. Le raisonnement au lycée
Vers la formalisation

Vocabulaire ensembliste

Commun aux trois programmes

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E, on utilise la notation $\overline{\mathrm{A}}$ des probabilités, ou la notation $E \setminus A$ si on souhaite préciser l'ensemble contenant.

II. Le raisonnement au lycée
Vers la formalisation

Raisonnement logique

Des variantes dans les trois programmes

II. Le raisonnement au lycée
Vers la formalisation

Programme : 2nde

Les élèves apprennent en situation à :

- reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication ;
- lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ sont hors programme).

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas et par l'absurde.

II. Le raisonnement au lycée
Vers la formalisation

Programme : 1$^{\text{ère}}$ Enseignement de spécialité voie générale

Les élèves apprennent en situation à :

- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs logiques « et », « ou » ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication ;
- employer les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- identifier le statut des égalités (identité, équation) et celui des lettres utilisées (variable, inconnue, paramètre) ;
- utiliser les quantificateurs (les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas exigibles) et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions, particulièrement dans les propositions conditionnelles ;
- formuler la négation de propositions quantifiées.

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas, par l'absurde, par contraposée, et en découvrent la structure.

II. Le raisonnement au lycée
Vers la formalisation

Programme : 1$^{\text{ère}}$ Enseignement commun voie technologique

Les élèves s'exercent à :

- utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;
- identifier le statut d'une égalité (identité, équation) et celui de la ou des lettres utilisées (variable, indéterminée, inconnue, paramètre) ;
- utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- distinguer une proposition de sa réciproque ;
- utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante », « équivalence logique ».

Commentaires :

La construction de conditions logiques en algorithmique à l'aide des opérateurs ET, OU, NON et la création de filtres en analyse de données sont l'occasion de travailler la logique.

Dans le cours de mathématiques, le professeur est attentif à expliciter la nature des raisonnements conduits (raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde) ainsi que les quantificateurs à l'œuvre, en langage naturel et sans formalisme.

II. Le raisonnement au lycée
La place de l’oral

Instaurer des moments de verbalisation et de reformulation par l’élève d’un raisonnement pour :

- préciser sa pensée et expliciter son raisonnement
- s’approprier un vocabulaire rigoureux
- permettre à chacun de faire évoluer sa pensée, jusqu’à la remettre en cause si nécessaire, pour accéder progressivement à la vérité par la preuve.

II. Le raisonnement au lycée
La trace écrite

Instaurer une trace écrite du raisonnement et des notations mathématiques à différents moments de chaque chapitre.

Quel type de trace écrite ?

- De la part du professeur ?

- De la part de l'élève ?

II. Le raisonnement au lycée
La trace écrite

De la part du professeur

Extrait des nouveaux programmes

« Le professeur doit avoir le souci de la **bonne qualité (mathématique et rédactionnelle) des traces écrites figurant au tableau et dans les cahiers d'élèves**. En particulier, il est essentiel de bien distinguer le statut des énoncés (conjecture, définition, propriété - admise ou démontrée -, démonstration, théorème). »

Le professeur doit veiller à ce que les activités qui utilisent un raisonnement donnent lieu le plus souvent possible à une trace écrite rigoureuse.

La trace écrite du professeur constitue une référence pour l'élève.

II. Le raisonnement au lycée
La trace écrite

De la part de l'élève

Extrait des nouveaux programmes

« L'élève doit disposer d'une trace de cours claire, explicite et structurée […]

Elle récapitule de façon organisée les connaissances, les méthodes et les stratégies étudiées en classe […] Elle constitue pour l'élève une véritable référence vers laquelle **il peut se tourner** […]

Elle favorise à la fois la mémorisation et le développement de compétences ».

En s'appuyant sur cette référence, l'élève doit progressivement prendre conscience :

- que la rigueur permet de mieux comprendre et maîtriser les concepts mathématiques utilisés
- que la rigueur facilite la mise en place des raisonnements

Sans rigidité excessive, la restitution écrite d'un raisonnement par l'élève doit dans la mesure du possible tendre vers un discours davantage mathématisé (rigueur dans les notations, explicitation des objets, enchaînements logiques…)

III. Mise en œuvre
Travail sur Vocabulaire ensembliste et logique

- Découverte en situation et entrainement possible sous forme de questions flash (automatismes)

- Utilisation dans les démonstrations

III. Mise en œuvre
Travail sur Vocabulaire ensembliste et logique

Programme : 2nde

Vocabulaire et notations ensemblistes

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E, on utilise la notation A des probabilités, ou la notation $E \setminus A$ si on souhaite préciser l'ensemble contenant.

A mettre en place dès le début de l'année (transversal):

Les notions d'éléments d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance

La notation des ensembles de nombres et des intervalles

Réunion

A mettre en place au moment opportun:

Inclusion, intersection, complémentaire d'un sous-ensemble A de E. (probabilités, géométrie)

III. Mise en œuvre
Travail sur Vocabulaire ensembliste et logique

Programme : 2^{nde}

Les élèves apprennent en situation à :

– reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;

Une proposition mathématique est une **phrase verbalisée qui doit être VRAIE ou FAUSSE.**

Exemple :

« 3 est un nombre entier» est une proposition mathématique vraie

« $\frac{1}{2}$ est un nombre entier» est une proposition mathématique fausse

« $x \in \mathbb{N}$» est une proposition mathématique. Elle est vraie si la variable x est un entier, elle est fausse si la variable x n'est pas un entier.

« n entier naturel » n'est pas une proposition mathématique

III. Mise en œuvre
Travail sur Vocabulaire ensembliste et logique

Programme : 2nde

– lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou »

Exemples :

En arithmétique: « x est un multiple de 3 et un multiple de 5 »

En probabilités : « Obtenir un cœur et un roi » qui se traduit en $A \cap B$

En programmation :

```
if x<-1 or x>1:
```

On peut travailler ces connecteurs logiques lors de résolution d'équations, d'inéquations, en arithmétique

III. Mise en œuvre
Travail sur Vocabulaire ensembliste et logique

Programme : 2^{nde}

– formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs)

Exemples :

Proposition P : « 12 est divisible par 3 »

Non P: « 12 n'est pas divisible par 3 »

Non [Non P] est P

III. Mise en œuvre
Travail sur Vocabulaire ensembliste et logique

Programme : 2nde

– mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;

Exemples:

« Tout quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires »

Il suffit d'en construire un pour lequel ce n'est pas vrai.

« Tout multiple de 3 est multiple de 6 »

15 est multiple de 3 mais n'est pas multiple de 6 donc la proposition est fausse.

III. Mise en œuvre
Travail sur Vocabulaire ensembliste et logique

Programme : 2^nde

– formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;

Exemples:

« Si I est le milieu de $[AB]$ alors les points A, I et B sont alignés »

« Le triangle MNP est isocèle en N équivaut à $\widehat{M} = \widehat{P}$ »

« $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$ »

III. Mise en œuvre
Travail sur Vocabulaire ensembliste et logique

Programme : 2nde

– formuler la réciproque d'une implication

Exemples :

« si $x = 3$ alors $2x = 6$ » a pour réciproque « si $2x = 6$ alors $x = 3$ »

III. Mise en œuvre
Travail sur Vocabulaire ensembliste et logique

Programme : 2nde

– lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles ∀ et ∃ sont hors programme)

Exemples :

« Quels que soient a et b réels, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ »

« Un rectangle a ses diagonales de même longueur » qui signifie « quel que soit le rectangle considéré, ses diagonales sont de même longueur »

III. Mise en œuvre
Les démonstrations

Extrait des préambules des programmes de 2nde et 1ère générale

« Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc».

Lors des démonstrations, on réinvestit le vocabulaire ensembliste et logique dans une démarche déductive.

C'est à cette occasion que les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas et par l'absurde en 2nde auxquels s'ajoutent des raisonnements par contraposée en 1ère.

III. Mise en œuvre
Les démonstrations

- Les démonstrations du programme ont une valeur d’exemple ou de référence.

- Pour plusieurs d’entre elles, différents « niveaux » de démonstrations sont possibles.

- En fonction du niveau choisi par le professeur, elles peuvent être traitées sous différentes modalités.

- En fonction du niveau choisi, le professeur pourra demander aux élèves de réinvestir la démarche ou pas.

III. Mise en œuvre
Les démonstrations

- Niveau « exposé par le professeur »

- C'est elle ou lui qui doit conduire la démonstration rigoureusement.
- C'est l'occasion de mettre en place des éléments de logique et raisonnement : les quantificateurs (sans formalisation), les connecteurs logiques et les différents types de raisonnements :

  Raisonnement déductif, disjonction des cas, raisonnement par l'absurde, par contraposée…

- Même si elle est menée par le professeur, la démonstration s'accompagne d'un travail préalable sous forme de questionnement des élèves sur les prérequis qui vont être utilisés.
- Elle fera l'objet d'une trace écrite exhaustive dans le cahier.

- Niveau « semi-autonomie »

- La démonstration est présentée comme un exercice avec des questions intermédiaires pour guider l'élève, qui peuvent être différenciées.

- Niveau « initiation à la démonstration »

- Pour certains élèves, un temps d'initiation, sans trop de formalisme et d'abstraction, est nécessaire pour mieux appréhender les notions.

En seconde

Exemple 1

$\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

➢ Niveau exposé par le professeur

Prérequis : qu'est-ce qu'un décimal ? notion de diviseur ; critères de divisibilité

On fait une démonstration par l'absurde : On suppose que $\frac{1}{3}$ est décimal. Alors, il existe deux entiers naturels a et k tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^k}$. Soit $3a = 10^k$. Donc 3 est un diviseur de 10^k ce qui est absurde par le critère de divisibilité par 3.

➢ Niveau semi-autonomie :

On fait une démonstration par l'absurde : On suppose que $\frac{1}{3}$ est décimal.

- Quel peut-être le dernier chiffre après la virgule d'un nombre décimal ?
- $\frac{1}{3}$ peut s'écrire : $\frac{1}{3} = 0, \dots \dots \dots 1$ ou $\frac{1}{3} = 0, \dots \dots \dots 2$ ou … et les élèves complètent
- On regarde le dernier chiffre obtenu après multiplication par trois dans chacun des cas
  → *raisonnement par disjonction des cas.*

➢ Niveau initiation à la démonstration

On pose la division de 1 par 3 et on « voit » que ça ne s'arrête jamais.

Exemple 2

Variation de la fonction carré

➢ Niveau exposé par le professeur

Prérequis : lien entre la phrase « les x augmentent » et l'inégalité $a \leq b$; On considère deux nombres réel a et b positifs tels que $a \leq b$.
On a : $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$.

Comme $a \leq b$ le facteur $b - a$ est positif.

Comme a et b sont positifs, le facteur $a + b$ est positif. Donc le produit $(b-a)(b+a)$ est positif.

Ainsi $b^2 - a^2$ est positif soit $a^2 \leq b^2$. La fonction carré est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

➢ <u>Niveau semi-autonomie : présenté comme un exercice (réinvestissement de la démarche)</u>

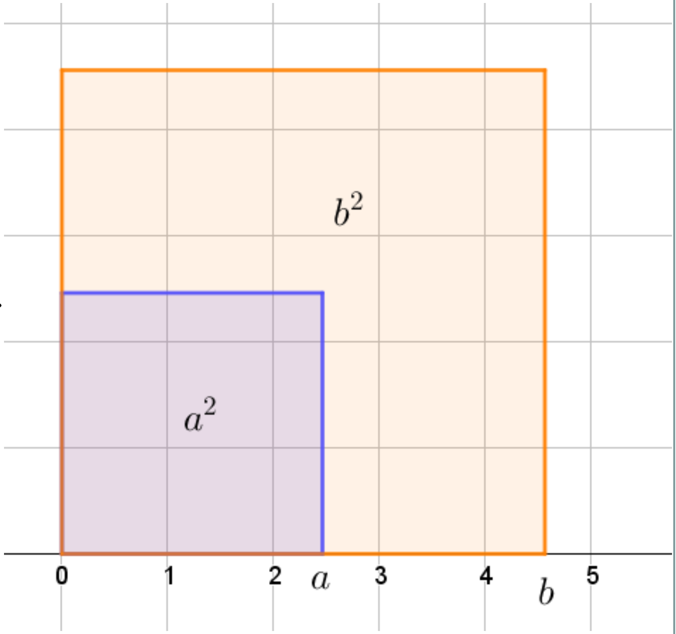
On fait démontrer que la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$.

➢ <u>Niveau initiation</u>

Le programme précise que dans un premier temps, les élèves découvrent, manipulent et verbalisent certaines propriétés sur les fonctions de référence. Leur maitrise est un objectif de fin d'année. On peut donc commencer par des présentations du style :

« Lorsque les x augmentent, les $f(x)$ augmentent ou diminuent »

On dit que la fonction est croissante sur un intervalle.



Exemple 3

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

- Niveau exposé par le professeur

Prérequis : Qu'est-ce qu'un rationnel ? Définition de fraction irréductible ; p^2 est pair implique p est pair (démonstration à faire avant).

Par l'absurde : On suppose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible. On a alors $p^2 = 2q^2$.
Or p^2 est pair implique p est pair. Donc $p = 2p'$. On trouve alors $4p'^2 = 2q^2$ soit $q^2 = 2p'^2$.
On en déduit que q^2 est pair donc q est pair. La fraction initiale $\frac{p}{q}$ n'est donc pas irréductible.
Contradiction.

- <u>Niveau semi-autonomie : présenté comme un exercice</u>

Par l'absurde . On suppose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.

Disjonction des cas sur le dernier chiffre de p^2 et $2q^2$.

Dernier chiffre de p ou q	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Dernier chiffre de p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
Dernier chiffre de $2q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

Le seul cas où $p^2 = 2q^2$ est le cas où le dernier chiffre de p et q est 0. Donc la fraction initiale n'est pas irréductible. Contradiction.

Remarques :

Les démonstrations exposées par le professeur n’ont pas vocation à être réinvesties ou évaluées.
Exemple : pour $\frac{2}{3}$ n’est pas décimal, on peut réinvestir mais pour $\frac{1}{7}$ on ne peut pas conclure avec un raisonnement similaire.

Les démonstrations en semi autonomie peuvent être réinvesties sur d’autres exemples et même évaluées en DS.

Les initiations sont là pour faire comprendre à certains élèves des notions auxquelles ils ont du mal à accéder.

Travail proposé
par groupes de deux ou trois

Choisir et décliner deux démonstrations en 2 ou 3 niveaux dans les programmes de seconde ou première.

Comment traiter ces démonstrations concrètement en classe ?

Quels travaux préalables ?

Quels automatismes travailler avant ?

Quels raisonnements sont mis en jeu ?