Les problèmes au lycée

Le contexte

Au collège

1. Les programmes

    La place du raisonnement, de la démarche d'investigation et de la démonstration.

    Une place centrale pour la résolution de problèmes

    Les compétences mathématiques (chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer)

Le contexte

Au collège

1. Les programmes
   - La place du raisonnement, de la démarche d'investigation et de la démonstration
   - Une place centrale pour la résolution de problèmes
   - Les compétences mathématiques (chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer)
2. Le socle commun
   - Les compétences
   - Les tâches complexes

SOCLE Tâche complexe

84 Déterminer une probabilité

LA SITUATION-PROBLÈME

Un satellite va retomber dans l'océan Atlantique.
Aider les ingénieurs du centre spatial à déterminer la probabilité que leur hélicoptère puisse récupérer le satellite avant qu'il ne coule.

Doc. 1 : Informations sur le satellite

Le satellite va tomber à l'intérieur d'un disque de rayon 200 km et de centre le point de coordonnées 15°W 10°S. Le satellite coulera au bout de 24 minutes.

Doc. 2 : Informations sur l'hélicoptère

L'hélicoptère est prêt à décoller d'un bateau situé à 100 km à l'est du point de coordonnées 15°W 10°S.
Il décollera au moment où le satellite touchera la mer et sa vitesse moyenne sera de 225 km/h.

LES SUPPORTS DE TRAVAIL

Calculatrice, instruments de géométrie.

! Toute piste de recherche, même non aboutie, figurera sur la feuille.

Doc. 3 : Une carte de la région

Pratiquer une démarche scientifique

- Extraire des informations.
- Réaliser en autonomie une construction géométrique manuellement.
- Participer à la conception d'une méthode de calcul.

Le contexte

Au collège

1. Les programmes
   - La place du raisonnement, de la démarche d'investigation et de la démonstration
   - Une place centrale pour la résolution de problèmes
   - Les compétences mathématiques (chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer)
2. Le socle commun
   - Les compétences
   - Les tâches complexes
3. L'évolution du DNB

Exercice 1

Sur le chantier de sa future maison, M. Dubois croise un maçon qui semble avoir des difficultés à porter une tige d'acier pleine, de forme cylindrique.
Cette tige mesure 1,5 m de long et a un rayon de base de 4 cm.

1. Calculer le volume de cette tige arrondie au cm^3 près.
2. L'acier a une masse volumique de 7,85 g/cm^3. Calculer la masse de cette tige arrondie au kg.

Exercice 2

Un plaquiste souhaite recouvrir un mur rectangulaire avec des plaques isolantes.
Ce mur mesure 270 cm de haut sur 330 cm de large.
Les plaques isolantes doivent être de forme carrée, les plus grandes possibles et il ne veut pas de chutes.

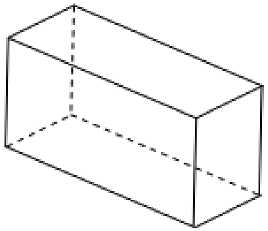
1. Calculer le PGCD des nombres 330 et 270 en indiquant la méthode utilisée.
2. En déduire les dimensions d'une de ces plaques isolantes et le nombre de plaques nécessaires.

DNB Amérique du Nord 2010

<u>Exercice 7</u> : (7 points)

Un agriculteur produit des bottes de paille parallélépipédiques.

<u>Information 1</u> : Dimensions des bottes de paille : 90 cm × 45 cm × 35 cm.

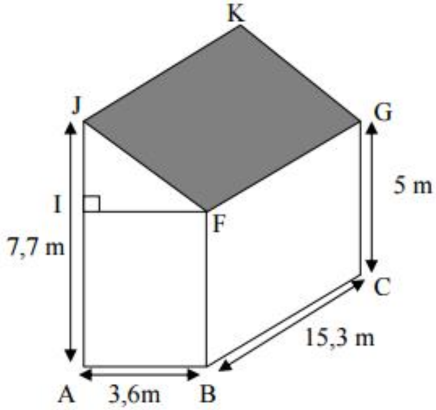


<u>Information 2</u> : Le prix de la paille est de 40 € par tonne.

<u>Information 3</u> : 1 m^3 de paille a une masse de 90 kg.

1) Justifier que le prix d'une botte de paille est 0,51 € (arrondi au centime).

2) Marc veut refaire l'isolation de la toiture d'un bâtiment avec des bottes de paille parallélépipédiques. Le bâtiment est un prisme droit dont les dimensions sont données sur le schéma ci-dessous.



Il disposera les bottes de paille sur la surface correspondant à la zone grisée, pour créer une isolation de 35 cm d'épaisseur. Pour calculer le nombre de bottes de paille qu'il doit commander, il considère que les bottes sont disposées les unes contre les autres. Il ne tient pas compte de l'épaisseur des planches entre lesquelles il insère les bottes.

a) Combien de bottes devra-t-il commander ?

b) Quel est le coût de la paille nécessaire pour isoler le toit ?

DNB Métropole 2014

Le contexte

Au collège

- Moins de connaissances et de savoir-faire mais plus de capacité à les mobiliser
- Une activité mathématique plus riche, plus attractive et moins repliée sur elle-même

Le contexte

Au lycée

- L'évolution des programmes (2009/2011/2012)

Le contexte

Au lycée

- L'évolution des programmes (2009/2011/2012)

Objectif général

L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :

- modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;
- conduire un raisonnement, une démonstration ;
- pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ;
- faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ;
- pratiquer une lecture active de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ;
- utiliser les outils logiciels (ordinateur ou calculatrice) adaptés à la résolution d'un problème ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

Dans la mesure du possible, les problèmes posés s'inspirent de situations liées à la vie courante ou à d'autres disciplines. Ils doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves. Au niveau d'une classe de seconde de détermination, les solutions attendues sont aussi en général simples et courtes.

Le contexte

Au lycée

- L'évolution des programmes (2009/2011/2012)

Diversité de l'activité de l'élève

La diversité des activités mathématiques proposées :

- chercher, expérimenter – en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit ;

doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de la situer au sein de l'activité scientifique. Cette prise de conscience est un élément essentiel dans la définition de leur orientation.

Il importe donc que cette diversité se retrouve dans les travaux proposés à la classe.

Le contexte

Au lycée

- L'évolution des programmes (2009/2011/2012)

1. Fonctions

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier :

- un problème se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une formule) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction ;
- un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Le contexte

Au lycée

- L'évolution des programmes (2009/2011/2012)

Enseignement de spécialité

L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme.

Le contexte

Au lycée

- L'évolution des programmes (2009/2011/2012)
- Un document ressource : « Les compétences mathématiques au lycée » , MEN/DGESCO-IGEN Novembre 2013

Les compétences mathématiques au lycée

La formation mathématique au lycée général et technologique vise deux objectifs :

- L'acquisition de connaissances et de méthodes nécessaires à chaque élève pour construire son avenir personnel, professionnel et citoyen, et préparer la poursuite d'études supérieures.
- Le développement de compétences transversales (autonomie, prise d'initiative, adaptabilité, créativité, rigueur…) et de compétences spécifiques aux mathématiques, explicitées ci-dessous.

Compétences

Chercher

Analyser un problème.

Extraire, organiser et traiter l'information utile.

Observer, s'engager dans une démarche, expérimenter en utilisant éventuellement des outils logiciels, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, reformuler un problème, émettre une conjecture.

Valider, corriger une démarche, ou en adopter une nouvelle.

Modéliser

Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide d'équations, de suites, de fonctions, de configurations géométriques, de graphes, de lois de probabilité, d'outils statistiques …).

Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique ou géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.

Valider ou invalider un modèle.

Représenter

Choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique…) adapté pour traiter un problème ou pour représenter un objet mathématique.

Passer d'un mode de représentation à un autre.

Changer de registre.

Calculer

Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel).

Mettre en œuvre des algorithmes simples.

Exercer l'intelligence du calcul : organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations, effectuer des simplifications.

Contrôler les calculs (au moyen d'ordres de grandeur, de considérations de signe ou d'encadrement).

Raisonner

Utiliser les notions de la logique élémentaire (conditions nécessaires ou suffisantes, équivalences, connecteurs) pour bâtir un raisonnement.

Différencier le statut des énoncés mis en jeu : définition, propriété, théorème démontré, théorème admis…

Utiliser différents types de raisonnement (par analyse et synthèse, par équivalence, par disjonction de cas, par l'absurde, par contraposée, par récurrence…).

Effectuer des inférences (inductives, déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision.

Communiquer

Opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel.

Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral.

Critiquer une démarche ou un résultat.

S'exprimer avec clarté et précision à l'oral et à l'écrit.

Cadre de mise en œuvre

La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. En effet, ceux-ci facilitent le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées. L'installation de ces réflexes nécessite la mise en œuvre directe, sur des exercices aux objectifs circonscrits, de procédures de base liées à chacune de ces compétences. Il n'y a pas d'ordre chronologique imposé entre l'entraînement sur des exercices et la résolution de problèmes. Cette dernière peut en effet révéler le besoin de s'exercer sur des tâches simples, d'ordre procédural, et motiver ainsi la nécessité de s'y engager.

Les commissions d'élaboration de sujets peuvent se référer à ces compétences afin que les exercices et questions proposés les mobilisent de façon équilibrée et permettent de les observer.

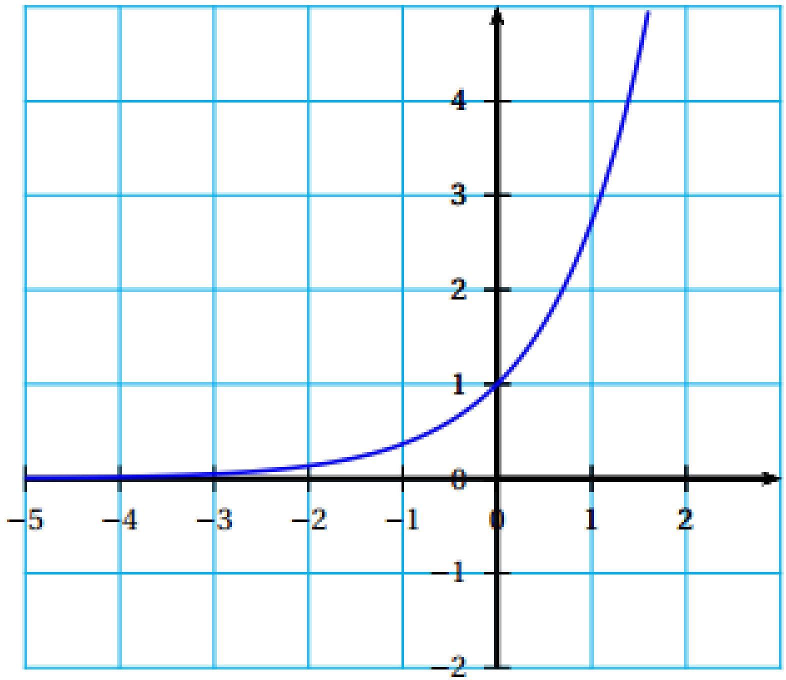
Le contexte

Au lycée

- L'évolution des programmes (2009/2011/2012)
- Un document ressource : « Les compétences mathématiques au lycée » , MEN/DGESCO-IGEN Novembre 2013
- L'évolution des épreuves du bac : Ressources_Lycee_T-S-ES-STI2D-STMG_Exercices-Math_349842.pdf

EXERCICE 3 **3 points**

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = e^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = e$.
   Démontrer que la droite $\mathscr{D}_e$, d'équation $y = ex$, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_m$.
3. Démontrer cette conjecture.

TS – LIBAN – 2015

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3x - 3x\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T ?

Dans l'enseignement supérieur

- Répondre aux exigences des BTS, des IUT et des écoles d'ingénieurs

- Mais pas d'évolution significative pour l'instant en licence de maths ou en CPGE

BTS – Référentiel des capacités du domaine mathématique - 2013

Objectifs généraux

L’enseignement des mathématiques doit contribuer au développement de la formation scientifique, grâce à l'exploitation de toute la richesse de la démarche mathématique : mathématisation d'un problème (modélisation), mise en œuvre d'outils théoriques pour résoudre ce problème, analyse de la pertinence des résultats obtenus au regard du problème posé. Il doit aussi contribuer au développement des capacités personnelles et relationnelles : acquisition de méthodes de travail, maîtrise des moyens d'expression écrite et orale ainsi que des méthodes de représentation (graphiques, schémas, croquis à main levée, organisation de données statistiques,...), avec ou sans intervention des outils informatiques.

Référentiel de compétences en licence 2012

Compétences transférables

- Etre autonome dans le travail : …, faire preuve de capacités d'abstractions, … , faire preuve d'initiative
- Faire preuve de capacités de recherche d'informations, d'analyse et de synthèse

Compétences disciplinaires (Physique-chimie)

- Analyser, modéliser et résoudre des problèmes simples
- Etre en capacité d'aborder un problème complexe
- Développer une argumentation
- Mettre en œuvre en autonomie une démarche expérimentale

Compétences disciplinaires (Economie)

- Utiliser l'outil mathématique pour résoudre un problème d'économie ou de gestion
- Interpréter des résultats d'analyses statistiques

Alors, qu'est-ce qu'on propose à nos élèves ?

Qu'est-ce qu'un bon problème ?

- Ce n'est pas un exercice d'application ou de mise en œuvre d'une procédure clairement identifiée à la lecture de l'énoncé ou de la question. De tels exercices sont néanmoins nécessaires dans la formation.
- Ce n'est pas un exercice guidé avec une multitude de questions.
- Mais c'est un exercice adapté au niveau des élèves : « Un problème pour un élève donné peut ne pas être un problème pour un autre élève ! »

Qu'est-ce qu'un bon problème ?

- Il doit vérifier quelques critères
  - L'énoncé est facilement compréhensible et suscite une certaine curiosité;
  - Sa résolution nécessite de prendre des initiatives;
  - L'expérimentation est possible (étude de cas particuliers, utilisation éventuelle de logiciels);
  - On peut trouver des réponses partielles et émettre des conjectures;
  - Il faut éventuellement modéliser;
  - Il faut élaborer une stratégie de résolution.

Qu’est-ce qu’un bon problème ?

- C’est un problème qui permet de travailler les compétences mathématiques :
  - chercher,
  - modéliser,
  - représenter,
  - raisonner,
  - calculer,
  - communiquer.

Exemple 1 : Seconde

Une corde non élastique de 10,5 mètres est attachée au sol entre deux crochets distants de 10 mètres. Tam tire la corde en son milieu et la lève aussi haut qu'il le peut.
Peut-il passer en dessous sans se baisser ?
Données numériques : Tam mesure 1m55.

Exemple 2 : Seconde

Un drone de Météo France part du sommet du Pic du Midi d'Ossau. Il doit se rendre au sommet du Vignemale. Il dispose d'une autonomie de 27,5 km. Arrive-t'il à destination ?

Exemple 3 : Premières ES/S/STMG

Bordeaux et Communauté urbaine de Bordeaux (CUB), projet « objectif 2030 ».

Un million d'habitants en 2030 pour Bordeaux et sa communauté urbaine ? C'est le projet que lance la CUB en partenariat avec l'Institut nationale de la statistique (Insee).

En 2007, année de référence pour ce projet, la CUB comptait 714 000 habitants.

- Un premier scénario, appelé « scénario de recentrage » (établi sur la base d'une augmentation constante), prévoit une augmentation de la population de la communauté urbaine de 11 800 personnes par an.
- Un second scénario, appelé « scénario tendanciel » établi sur la base d'une augmentation semblables aux années précédentes), prévoit une augmentation de 0,46% par an de la population de la communauté urbaine.

Le projet « objectif 2030 » sera-t-il atteint ?

« Le Quatre pages Insee Aquitaine septembre 2013 »

Source : Barbozo 1ère S : Situation B p 124 ou Barbozo 1ère ES Situation B p 134 (adapté)

Exemple 4 : TS

Enoncé fermé

Un cylindre a pour base un disque de rayon 1dm et contient de l'eau sur une hauteur de 0,5dm. On plonge dans ce cylindre une bille de diamètre x (en dm). On se propose de calculer le diamètre de la bille pour lequel le niveau de l'eau est tangent à la bille.

1) a) Déterminer le volume d'eau contenu dans le cylindre.
   b) Déterminer le volume de la bille en fonction de x.
   c) Justifier que le niveau de l'eau est tangent à la bille lorsque $x^3 - 6x + 3 = 0$

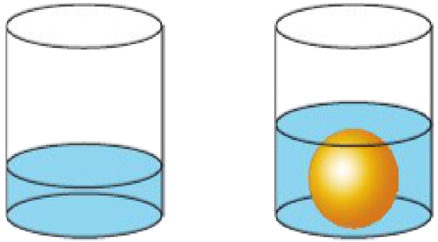
2) On considère la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = x^3 - 6x + 3$
   a) Montrer que pour tout x appartenant à $[0 ; 2]$, $f'(x) = 3(x^2 - 2)$
   b) Donner le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 2]$.
   c) Etudier les variations de f sur $[0 ; 2]$.

3) a) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;2]$.
   b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près

4) Conclure

89 Niveau d'eau tangent à une bille

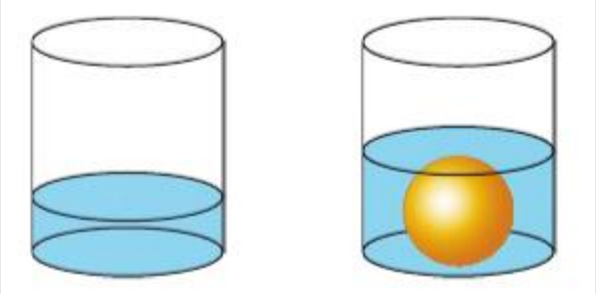
Un cylindre a pour base un disque de rayon 1 dm et contient de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm. On plonge dans ce cylindre une bille de diamètre d (en dm).
On se propose de calculer le diamètre de la bille pour lequel le niveau de l'eau est tangent à la bille.



1. Démontrer que d vérifie $0 < d < 2$ et $d^3 - 6d + 3 = 0$.
2. a) Démontrer que l'équation $x^3 - 6x + 3 = 0$ admet une solution unique dans $]0 ; 2[$.
b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Source : Hyperbole TS 89 p 139

Exemple 4 : TS



On dispose d'un cylindre de rayon 1dm dans lequel il y a de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm.
Peut-on plonger une bille dans ce cylindre de telle façon que celle-ci soit tangente au niveau de l'eau ?

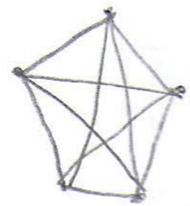
Exemple 5 : 2nde

Étant donnés plusieurs points sur une feuille,
combien peut-on tracer de segments joignant deux quelconques de ces points ?

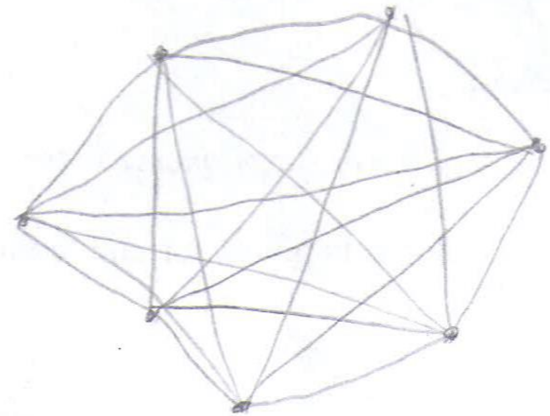
Si j'ai…	Je peux tracer au plus…
1 point	0 segment
2 points	1 segment
3 points	3 segments
4 points	
5 points	
6 points	
7 points	
12 points	
20 points	
108 points	
n points	

$(5-1)+(5-2)+(5-3)+(5-4)+(5-5)$

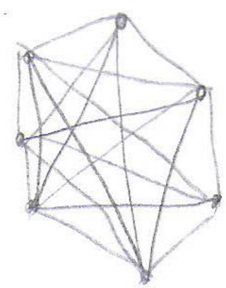
$\frac{n}{2} \times (n-1)$



$\frac{34}{2} \times (34-1)$



$17 \times 33 = 561$



$\frac{9}{2} \times (9-1)$

$4{,}5 \times 8 = 36$

$(9-1)+(9-2)+(9-3)+(9-4)+(9-5)+(9-6)+(9-7)+(9-8)+(9-9)$

Si j'ai…	Je peux tracer au plus…
1 point	0 segment
2 points	1 segment
3 points	3 segments
4 points	6
5 points	10
6 points	15
7 points	21
12 points	66
20 points	190
108 points	5728
n points	$1+2+3+\dots+(n-1)$

Au début j'ai commencé par déssiner les point en formant des figures géométriques (pas en ligne), puis je choisissais un des point que je reliais à tous les autres et je faisais pareil avec tous les points. Je me suis donc rendue compte que le 1^er^ point créais $n-1$ ségments (il n'en fait pas avec lui même), que le second en faisais $n-2$ (il n'en faisais toujours pas avec lui même et il avait déjà été relié au point précédent), le troisième en faisais $n-3$ car il était déjà relié aux deux précédents et ainsi de suite…

J'ai donc utilisé ça pour ne plus dessiner les points mais c'est quand même long donc je pense qu'il y a une formule que je n'ai pas réussi a trouver.

J'ai fait des figures pour compléter le tableau jusqu'à la case "12 points".

J'ai cherché des liens entres les différents nombres et j'ai vu que pour les segments on ajoutait pour passer à la case suivante le nombre qui suivait celui que l'on rajoutait pour trouver la case précédente. Ça marche bien mais c'est trop compliqué.

points	segment	
1	0	
2	1	+1
3	3	+2
4	6	+3
5	10	+4
6	15	+5
7	21	+6

J'ai essayé le produit en croix mais ça n'a rien donné.

1 point ~~=>~~ ~~0 segment~~ ← ce serait égal à 0,5.
2 points = 1 segment

Ensuite j'ai essayé de multiplier les nombres de la colonne "points". A chaque fois cela me donnait le double du nombre de segment et donc si l'on divise par 2, cela nous donne le nombre de segment correspondant.
Cette méthode marche pour tous les nombres.

points	segments
4	6
5	10

4×5 = produit $\xrightarrow{\div 2}$ 10 $= \frac{4\times 5}{2}$

$$\frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Si j'ai…	Je peux tracer au plus…
1 point	0 segment
2 points	1 segment
3 points	3 segments
4 points	6
5 points	10
6 points	15
7 points	21
12 points	66
20 points	190
108 points	5778
n points	$\frac{n \times (n-1)}{2}$

Quand ?

- <u>**Régulièrement en classe**</u>

« *L'objectif est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ces formes…* » (programme de 2nde)

« *Les activités proposées en classe et hors du temps scolaire prennent appui sur la résolution de problèmes…* » (programmes du cycle terminal)

Pour introduire une notion, pour mettre en œuvre des connaissances et des savoir-faire dans une situation donnée…

Mais il est également souhaitable de proposer des problèmes mettant en jeu des connaissances et capacités extérieures aux notions en jeu dans le chapitre en cours de construction.

Quand ?

- **<u>En devoir à rédiger sur feuille hors temps scolaire</u>**

« *Les travaux écrits faits hors du temps scolaire permettent, à travers l'autonomie laissée à chacun, le développement des <u>qualités d'initiative</u>.* » (programme 2nde)

- **<u>En contrôle</u>**

« *L'épreuve est destinée à évaluer la façon dont les candidats ont atteint les grands objectifs de formation mathématique visés par le programme :acquérir des connaissances et les organiser ; <u>mettre en œuvre une recherche de façon autonome</u> ; mener des raisonnements ; avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ; communiquer à l'écrit.* » (Note de service Bac)

De manière différenciée, sous la forme de questions ouvertes ou d'exercices avec prise d'initiative.

Mise en œuvre en classe

<u>Quelques critères de mise en œuvre :</u>

- Un temps d'appropriation individuelle de l'énoncé

Il permet de s'assurer de la compréhension par tous

- Un temps de recherche individuel et/ou collectif

Il permet l'exploration du problème, l'élaboration d'une stratégie, la confrontation des points de vue

- Une phase de restitution (écrite / orale)
- Une phase de synthèse (immédiate ou différée)

C'est un moment collectif indispensable. C'est mettre en lien tout ce qui a été proposé et synthétiser.

Que fait le professeur ?

- Rien ou presque !!!

- Il lance l'activité en donnant des consignes claires, fixe des règles de fonctionnement, suscite la curiosité…
- Il se déplace, observe, écoute, gère la classe pour donner le plus de place possible à l'activité des élèves.
- Il encourage, incite, rassure, valorise, garde une attitude bienveillante.

Que fait le professeur ?

- Il relance éventuellement la recherche…
- Il essaie de rester neutre pour laisser « vivre le faux ».
- Dans le cadre d’un travail collectif, il peut aider les élèves à dialoguer, susciter un questionnement de façon à confronter le groupe à une contradiction mais en veillant à ne pas apporter les réponses…
- Il adapte le déroulement de la séance en fonction des élèves et de leur compréhension.

➔ Le professeur doit accepter l’idée que maîtriser n’est pas toujours imposer !

Un exemple

ABC est un triangle isocèle en A tel que AB = AC = 10
Déterminer et caractériser parmi tous les triangles possibles celui dont l'aire est maximale.

Grille de « lecture » - niveau seconde

- **OBJECTIFS**

✓ Réinvestissement

De quelle notion ?
Généralités sur les fonctions, Lecture graphique de maximum à la calculatrice
Théorème de Pythagore, calcul d'aire

De quelles compétences ?
chercher

- Calculer l'aire de quelques triangles isocèles vérifiant les conditions.
- Construire la figure sur géogébra et conjecturer la valeur de AC maximisant l'aire.

Modéliser

- Traduire en langage mathématique, choix d'une inconnue longueur.
- Elaborer une simulation géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant Géogébra

Calculer

- Calcul de l'aire du triangle en fonction de la longueur BC.

Communiquer

- Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral.

- **PREREQUIS**

  Utilisation de la calculatrice graphique, maximum d'une fonction

- **MODALITES de mise en place**
  - ✓ Sur le temps de la classe : en classe entière ou en groupes
  - ✓ Recherche individuelle

MODALITES de mise en œuvre
- ✓ Temps de recherche individuel des élèves puis recherche en groupe
- ✓ Points de blocage :

  - manque de dimension (BC, hauteur du triangle)

  - utilisation de la calculatrice (graphique, tableau de valeurs)

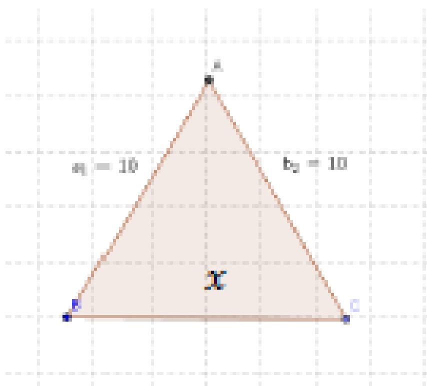
  -fonctions maximum de la calculatrice

  aides et remédiations possibles : donner la formule de l'aire, recherche de la hauteur

- **<u>MATERIEL ET OUTILS NUMERIQUES</u>**
  - ✓ Logiciels de géométrie dynamique,
  - ✓ Calculatrice
  - ✓ Matériel « basique » (papier, colle, ciseaux, …), matériel de géométrie, etc.

- **<u>DIFFERENTES PISTES</u>**

Modélisation à l'aide d'une longueur

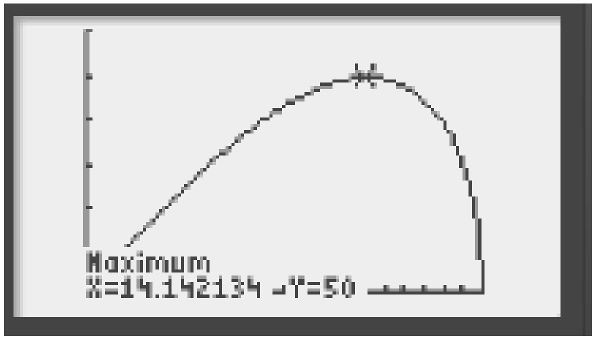


On pose $BC = x$, puis on détermine l'aire en fonction de x pour x entre 0 et 20.

$$A(x) = \frac{x \times \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}}}{2}$$

On étudie cette fonction sur [0 ;20].

En utilisation l'outil graphique de la calculatrice et la fonction « maximum », on obtient un maximum pour $x \approx 14{,}142$



Une fois obtenues les dimensions du triangle, il est plus difficile ici de caractériser ABC rectangle isocèle.

L'élève peut alors remarquer que $10\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale d'un carré de coté 10, vérifier en utilisant la réciproque de Pythagore et obtenir alors la réponse souhaitée.

Grille de « lecture » - niveau terminale

- **OBJECTIFS**

✓ Réinvestissement

De quelle notion ?
Etude de fonction de la forme $\sqrt{u}$
Etude de la fonction sinus pour une modélisation à l'aide d'un angle

De quelles compétences ?
chercher
- Calculer l'aire de quelques triangles isocèles vérifiant les conditions.
- Construire la figure sur géogébra et conjecturer la valeur de AC maximisant l'aire.

Modéliser
- Traduire en langage mathématique, choix d'une inconnue longueur ou angle.
- Elaborer une simulation géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant Géogébra (si besoin)

Calculer
- Calcul de dérivée (avec utilisation de logiciel de calcul formel ou en factorisant et en utilisant la dérivée d'un produit et de $\sqrt{u}$).

Communiquer
- Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral.

- **<u>PREREQUIS</u>**

  Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$

  Etude de la fonction sinus pour une modélisation à l'aide d'un angle

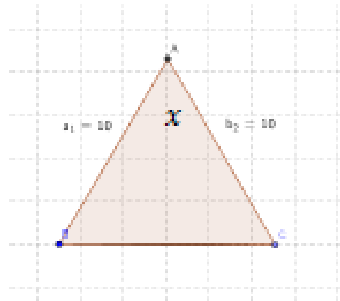
- **<u>MODALITES de mise en place</u>**
  - ✓ Devoir maison

- **<u>MATERIEL ET OUTILS NUMERIQUES</u>**
  - ✓ Logiciels de géométrie dynamique,
  - ✓ Calculatrice

Différentes approches :

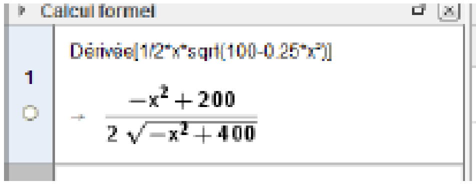
1. Modélisation à l'aide d'une longueur

On pose $BC = x$, puis on détermine l'aire en fonction de x pour x entre 0 et 20.



$$A(x) = \frac{x \times \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}}}{2}$$

On étudie cette fonction sur [0;20]. La dérivée est obtenue à l'aide d'un logiciel de calcul formel, ou en factorisant $100 - \frac{x^2}{4}$ afin d'obtenir un produit de fonctions de la forme $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ au programme de terminale.

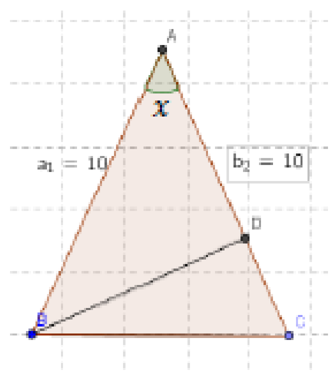


En étudiant le signe de la dérivée, on obtient un maximum pour $x = 10\sqrt{2}$

Une fois obtenues les dimensions du triangle, il est plus difficile ici de caractériser ABC rectangle isocèle.

L'élève peut alors remarquer que $10\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale d'un carré de coté 10, vérifier en utilisant la réciproque de Pythagore et obtenir alors la réponse souhaitée.

2. Modélisation à l'aide d'un angle.



On pose $x = \widehat{BAC}$, et on exprime l'aire en fonction de x à l'aide de formule trigonométrique pour x entre 0 et π.

$$A(x) = \frac{BD \times AC}{2} = \frac{10 \sin x \times 10}{2} = 50 \sin x$$

Cette fonction admet un maximum pour $x = \frac{\pi}{2}$ sur $[0; \pi]$

Le triangle est alors isocèle et rectangle en A.

Bibliographie et sitographie

- Programmes
- « Étude en didactique des mathématique », Guy Brousseau
- « Autour des problèmes ouverts en classe », IREM Paris VII, brochure IREM n°96.
- Une banque d'exercices avec prise d'initiative : http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/84/2/Ressources_Lycee_T-S-ES-STI2D-STMG_Exercices-Math_349842.pdf
- Une banque de problèmes collège / lycée avec exemples de mise en œuvre : www.pedagogie.ac-nantes.fr/.../**problemes-ouverts**-taches-complexes
- 370 énoncés de problèmes pour le lycée : www.mathaari.fr › truc › Lycée
- Encore des énoncés : http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/prob-ouverts
- Des animations, des paradoxes, des énigmes : Mathématiques magiques/ ***therese**.**eveilleau**.pagesperso-orange.fr*