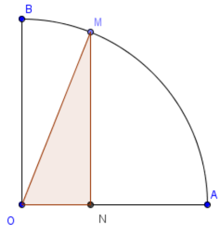
<u>Concevoir une mise en œuvre à partir d'une situation donnée</u>

Exercice A.

OAB est un quart de disque de centre O et de rayon 1 dm. M est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$. N est le projeté orthogonal sur le segment [OA]. Peut-on trouver une position du point M pour que l'aire du triangle OMN soit maximale ?



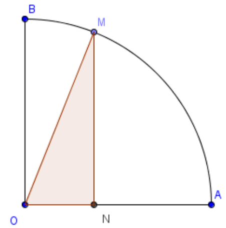
<u>Extrait du programme de 1ère :</u>

On traite quelques problèmes d'optimisation

Une construction de la figure sur un logiciel de géométrie dynamique permet de conjecturer :

- que l'aire maximale est 0,25 dm².
- que la position du point M correspondante est située autour de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. Il peut y avoir une imprécision à ce niveau suivant le nombre de décimales dans l'affichage de l'aire, de l'abscisse de M, ou de la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.
- que le paramètre de repérage du point M peut être son abscisse, ou une mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.

Piste 1 :



Choix du paramètre : $x = x_M$; abscisse de M dans le repère (O,A,B). $x \in [0;1]$.

$A_{OMN} = \dfrac{ON \times MN}{2}$.

a) <u>Obstacle 1</u> : Il faut alors penser à calculer $y_M = \sqrt{1-x^2}$ de manière à n'avoir qu'un paramètre.

Alors $A_{OMN} = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$.

b) <u>Obstacle 2</u> : l'étude de la fonction de x définissant l'aire est complexe : la dérivée de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ n'est pas connue en 1ère.

<u>Extrait du programme de 1ère :</u>

Le calcul de dérivées dans des cas simples est un attendu du programme ; **dans le cas de situations plus complexes, on sollicite les logiciels de calcul formel.**

c) Une solution : le logiciel XCas comme outil de calcul formel donne (avec « factoriser(deriver(x*sqrt(1-x^2))) ») une expression factorisée de $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$ sous la forme $x \mapsto \dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}}{(x^2-1)}$ dont le signe peut être déterminé en 1ère.

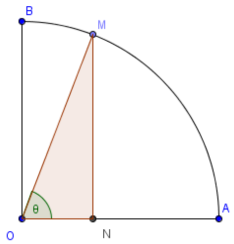
d) <u>Obstacle 3</u> : la fonction $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$ n'est pas dérivable en 1 et des questions peuvent émerger sur le domaine de définition de la dérivée.

e) Une solution : pour $x = 1$, l'aire est nulle donc n'est pas maximale, on peut exclure la valeur 1 de l'étude par rapport à notre problème.

f) La position de M correspond alors à $x_M = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui permet de trouver $y_M = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et de confirmer que M est alors sur la bissectrice.

L'étude démontre qu'une seule position de M convient, et que l'aire vaut alors 0,25 dm².

Piste 2 :



Choix du paramètre : θ , mesure de $\widehat{\text{AOM}}$. $\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

$A_{\text{OMN}} = \frac{\text{ON}\times\text{MN}}{2}$. Alors $A_{\text{OMN}} = \frac{\cos\theta\times\sin\theta}{2}$.

a) Obstacle 1 :

Extrait du programme de 1ère :

L'étude des fonctions cosinus et sinus n'est pas un attendu du programme

Les dérivées de ces fonctions ne sont pas connues en 1ère .

b) Une solution :

Extrait du programme de 1ère :

Formules d'addition et de duplication des fonctions cosinus et sinus.

$$A_{\text{OMN}} = \frac{\cos\theta\times\sin\theta}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sin(2\theta)}{2} = \frac{\sin(2\theta)}{4}.$$

Extrait du programme de 1ère :

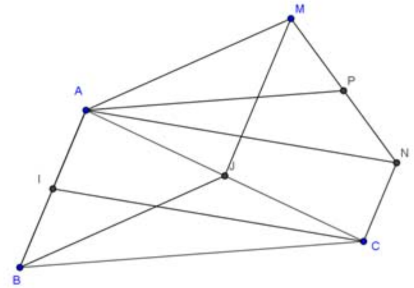
Il n'est pas toujours utile de recourir à la dérivation pour étudier le sens de variation d'une fonction.

L'aire est alors maximale si la fonction $\theta \mapsto \sin(2\theta)$ atteint son maximum sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

C'est le cas si $2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$. Ce qui permet de démontrer la conjecture.

Exercice B.

ABC est un triangle quelconque. I est le milieu de [AB], J celui de [AC]. M est le point tel que ABJM est un parallélogramme, N est le point tel que AICN est un parallélogramme. P est le milieu du segment [MN]. Que dire des droites (AP) et (BC) ?

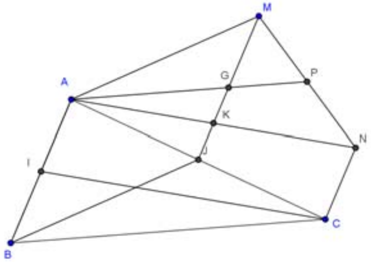


Extrait du programme de 1ère :

L'objectif est de renforcer la capacité des élèves à étudier des problèmes dont la résolution repose sur des calculs de distances et d'angles, la démonstration d'alignement, de parallélisme ou d'orthogonalité.

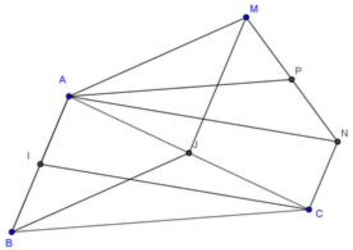
L'idée est de laisser chaque élève choisir une méthode et de l'aider ensuite dans la mise en œuvre de **sa** méthode.

Piste 1 : Avec des configurations



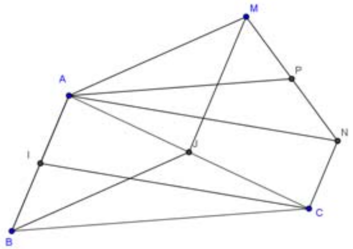
En utilisant des points de la figure, comme G le point d'intersection de (AP) et (JM), et/ou K le point d'intersection de (AN) et (JM), et/ou H le milieu de [JN], on peut démontrer que (AP) est parallèle à (BC).

Piste 2 : Avec un repère



Si l'élève est sensibilisé au choix d'un repère, même quelconque, il peut, dans le repère (B ;C ;A) par exemple chercher les coordonnées de P et utiliser les vecteurs ou les droites pour conclure.

Piste 3 : Calcul vectoriel



On peut exprimer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Exemple :

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ donc

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BJ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

Méthode un peu « experte » en 1°S pour des élèves qui ont découvert les vecteurs en 2^{nde}, en géométrie repérée, et ne les pratiquent hors repère que depuis peu de temps.

Extraits du programme de $1^{ère}$:

Expression d'un vecteur du plan en fonction de deux vecteurs non colinéaires
Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes
On ne se limite pas au cadre de la géométrie repérée

Divers points d'appui possibles à donner à un élève ayant choisi la
Piste 1 : Avec des configurations ou à un élève analysant la figure qui ne démarre pas, n'évoque ni les vecteurs, ni un repère.

On peut donner un énoncé plus ou moins détaillé à un élève, ou distiller à l'oral des indications (pas forcément toutes) au fur et à mesure si la gestion du groupe le permet.

Exemples d'indications suivant le comportement de l'élève :

G le point d'intersection de (AP) et (JM), K le point d'intersection de (AN) et (JM).
Étudier la position de K sur le segment [AN].
Que représente G pour le triangle AMN ?
Que représente G pour le segment [MJ] ?

Ou

Utiliser le milieu H du segment [JN].

Divers points d'appui possibles à donner à un élève ayant choisi la
Piste 2 : Avec un repère

Calculer les coordonnées de A, B, C. En déduire celles de I et de J.
Calculer les coordonnées de M et de N, puis celles de P.
Conclure.

Divers points d'appui possibles à donner à un élève ayant choisi la
Piste 3 : Calcul vectoriel

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IC}$

Ou

Pourquoi a-t-on $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$?

Prouver que $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

Ou

Plus détaillé si l'élève choisit cette piste en n'ayant pas assez de savoir-faire sur le calcul vectoriel

Un « Devoir Maison » peut faire suite à cette résolution de problème

Extrait du programme de 1ère :

Fréquents, de longueur raisonnable et de nature variée, les travaux hors du temps scolaire contribuent à la formation des élèves et sont absolument essentiels à leur progression. Ils sont conçus de façon à prendre en compte la diversité et l'hétérogénéité de leurs aptitudes.

Donner à chaque élève de façon différenciée une solution à rédiger, autre que celle qu'il a choisie en classe notamment, ou suivant les méthodes qu'il doit acquérir. On peut aussi ne pas demander de méthode experte à certains.

Exemples :

Si on souhaite faire progresser l'élève dans le travail hors repère :

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$.
b) En déduire une expression de $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IC}$.
c) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
d) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
e) En déduire que $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Conclure.

Si on souhaite que l'élève revoie les configurations usuelles :

Démontrer la conjecture en utilisant G, le point d'intersection de (AP) et (JM), et K le point d'intersection de (AN) et (JM).

Ou

Démontrer la conjecture à l'aide de H, le milieu du segment [JN].

Si on souhaite convaincre l'élève de l'efficacité du choix d'un repère :

Démontrer la conjecture en choisissant le repère (B ;C ;A).

Ou

Démontrer la conjecture en travaillant dans un repère.

On peut aussi demander à certains élèves deux méthodes différentes de celle utilisée par l'élève en classe, ou les trois méthodes à quelques élèves.