

On souhaite résoudre le problème suivant :

Peut-on trouver un réel positif qui, une fois élevé au cube, a la même valeur que son double augmenté de un.

1. Traduire le problème par une équation.
2. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le nombre de solutions positives de cette équation.
3. A l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, déterminer un encadrement au millième de cette solution, notée φ .
4. Déterminer la valeur exacte de φ à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
5. Démonstration :
 - a. Ecrire l'équation précédente sous la forme $f(x) = 0$.
 - b. Déterminer à l'aide d'un logiciel de calcul formel la forme factorisée de $f(x)$.
 - c. En déduire que résoudre l'équation précédente revient à résoudre l'équation $g(x) = 0$ avec $g(x) = x^2 - x - 1$ et $x > 0$.
 - d. Déterminer à l'aide d'un logiciel de calcul formel la forme canonique de $g(x)$ et en déduire la valeur exacte de φ .
6. Vérifier à l'aide de calculs algébriques les égalités obtenues avec le logiciel de calcul formel.
7. Montrer que l'inverse de φ est égal à $\varphi - 1$.