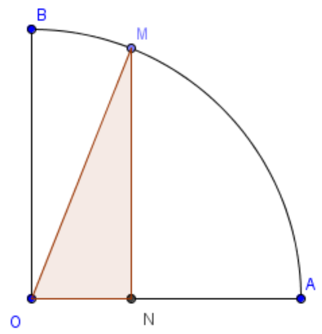
Optimisation

OAB est un quart de disque de centre O et de rayon 1 dm. M est un point du quart de cercle. N est le projeté orthogonal sur le segment $[OA]$. Peut-on trouver une position du point M pour que l'aire du triangle OMN soit maximale ?



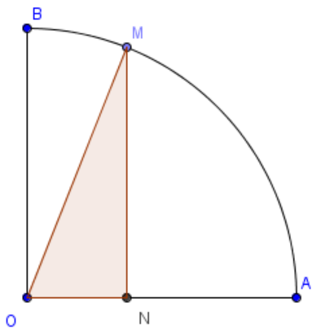
Extrait du programme de 1ère :

On traite quelques problèmes d'optimisation.

Une construction de la figure sur un logiciel de géométrie dynamique permet de conjecturer

- ✓ que l'aire maximale est 0,25 dm^2.
- ✓ que la position du point M correspondante est située autour de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. Il peut y avoir une imprécision à ce niveau suivant le nombre de décimales dans l'affichage de l'aire, de l'abscisse de M, ou de la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.
- ✓ que le paramètre de repérage du point M peut être son abscisse, ou une mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.

Piste 1 :



Choix du paramètre : $x = x_M$; abscisse de M dans le repère $(O\ ;\ A\ ;\ B)$, $x \in [0\ ;1]$.

$$A_{OMN} = \frac{OM \times ON}{2}$$

.

a. Obstacle 1 :

Il faut alors penser à calculer $y_M = \sqrt{1-x^2}$ de manière à n'avoir qu'un paramètre.

Alors $\quad A_{OMN} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$.

b. Obstacle 2 :

L'étude de la fonction de x définissant l'aire est complexe : la dérivée de $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ n'est pas connue en $1^{\text{ère}}$.

Extrait du programme de 1ère :

Le calcul de dérivées dans des cas simples est un attendu du programme ; **dans le cas de situations plus complexes, on sollicite les logiciels de calcul formel.**

c. Une solution : le logiciel XCas comme outil de calcul formel donne (avec $factoriser(deriver(x * sqrt(1 - x\text{^}2)))$ ») une expression factorisée de $x \longmapsto \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$ sous la forme $x \longmapsto \frac{(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}}{x^2-1}$ dont le signe peut être déterminé en 1ère .

d. Obstacle 3 :

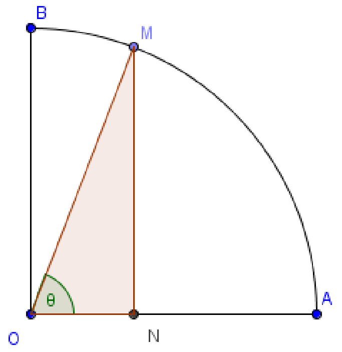
On ne sait pas dériver la fonction $x \longmapsto \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$ en $1^{\text{ère}}$.

e. Une solution : pour $x = 1$, l'aire est nulle donc n'est pas maximale, on peut exclure la valeur 1 de l'étude par rapport à notre problème.

f. La position de M correspond alors à $x_M = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui permet de trouver $y_M = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et de confirmer que M est alors sur la bissectrice.

L'étude démontre qu'une seule position de M convient, et que l'aire vaut alors 0,25 dm^2.

Piste 2 :



Choix du paramètre : θ, mesure de $\widehat{AOM}, \theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

$A_{OMN} = \dfrac{OM \times ON}{2}$.

Alors $A_{OMN} = \dfrac{\cos\theta \times \sin\theta}{2}$.

a. Obstacle 1 :

<u>Extrait du programme de 1ère :</u>

L'étude des fonctions cosinus et sinus n'est pas un attendu du programme.

Les dérivées de ces fonctions ne sont pas connues en 1ère .

b. Une solution :

<u>Extrait du programme de 1ère :</u>

Formules d'addition et de duplication des fonctions cosinus et sinus.

$$A_{OMN} = \frac{\cos\theta \times \sin\theta}{2}$$
$$A_{OMN} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin(2\theta)}{2}$$
$$A_{OMN} = \frac{\sin(2\theta)}{4}$$

<u>Extrait du programme de 1ère :</u>

Il n'est pas toujours utile de recourir à la dérivation pour étudier le sens de variation d'une fonction.

L'aire est alors maximale si la fonction $\theta \longmapsto \sin(2\theta)$ atteint son maximum sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

C'est le cas si $2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$. Ce qui permet de démontrer la conjecture.