

Le paradoxe du Duc de Toscane

Niveau

Seconde

Énoncé

À la cour de Florence, de nombreux jeux de société étaient pratiqués. Parmi ceux-ci, l'un faisait intervenir la somme des numéros sortis lors du lancer de trois dés. Le Duc de Toscane, qui avait sans doute observé un grand nombre de parties de ce jeu, avait constaté que la somme 10 était obtenue légèrement plus souvent que la somme 9. Le paradoxe, que le Duc avait exposé à Galilée, réside dans le fait qu'il y a autant de façons d'écrire 10 que 9 comme sommes de trois entiers compris entre 1 et 6 :

$$10 = 6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3 \text{ (6 possibilités)}$$

$$9 = 6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3 \text{ (6 possibilités)}$$

Le but de l'activité est de savoir si le Duc de Toscane avait raison en parlant de paradoxe.

Prérequis

- ✓ Utilisation d'Algobox
- ✓ Instructions conditionnelles, boucle « pour »
- ✓ Arbre de probabilité

Objectifs

Élaborer un algorithme afin de conjecturer une probabilité et démontrer la conjecture.

On donne à l'élève un algorithme simulant le lancer d'un dé et il lui est demandé d'analyser cet algorithme, puis de le compléter afin de simuler le lancer de trois dés et de calculer la somme obtenue.

Il doit ensuite modifier l'algorithme afin de simuler un grand nombre de lancers de trois dés, puis de comptabiliser le nombre de sommes égales à 9 et à 10 obtenues lors de ces simulations ainsi que leur fréquence d'apparition.

L'utilisation d'un arbre de probabilités permet de justifier la conjecture obtenue.

Déroulement de la séance

En salle informatique, la partie démonstration pouvant être terminée à la maison.

Fiche élève

Le paradoxe du Duc de Toscane

Galilée (1554-1642) est surtout connu pour ses travaux en astronomie, faisant suite à son invention de la lunette astronomique. Cependant, il rédigea vers 1620 un petit mémoire sur les jeux de dés pour répondre à une demande du Duc de Toscane (Galilée est alors Premier Mathématicien de l'Université de Pise et Premier Philosophe du Grand Duc à Florence). Galilée est ainsi l'un des premiers avec Cardan à avoir écrit sur le « calcul des hasards », mais leurs écrits n'ont été publiés qu'après la célèbre correspondance entre Pascal et Fermat qui marque « officiellement » le début de la théorie des probabilités. Le mémoire de Galilée qui nous intéresse n'a été édité qu'en 1718.

A la cour de Florence, de nombreux jeux de société étaient pratiqués. Parmi ceux-ci, l'un faisait intervenir la somme des numéros sortis lors du lancer de trois dés. Le Duc de Toscane, qui avait sans doute observé un grand nombre de parties de ce jeu, avait constaté que la somme 10 était obtenue légèrement plus souvent que la somme 9. Le paradoxe, que le Duc avait exposé à Galilée, réside dans le fait qu'il y a autant de façons d'écrire 10 que 9 comme sommes de trois entiers compris entre 1 et 6 :

$$10 = 6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3 \text{ (6 possibilités)}$$

$$9 = 6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3 \text{ (6 possibilités)}$$

I. Simulation à l'aide d'un algorithme

- 1) Ouvrir le fichier lancer.alg.
Tester l'algorithme donné ; que fait-il ?
- 2) Modifier cet algorithme afin de simuler le lancer de trois dés et d'afficher la somme des chiffres obtenus.
- 3) Exécuter un certain nombre de fois l'algorithme précédent. Que penser de la fréquence d'apparition des sommes 9 et 10 ?
- 4) Modifier l'algorithme afin de simuler N lancers de trois dés, de comptabiliser le nombre d'apparitions de la somme 9 et de la somme 10, puis leur fréquence d'apparition sur l'ensemble des N lancers.
- 5) Cette simulation semble-t-elle donner raison au Duc de Toscane ?

II. Étude mathématique

- 1) A l'aide d'un arbre, dénombrer les tirages possibles de lancers de trois dés.
- 2) Compter le nombre de façons différentes d'obtenir la somme 9.
- 3) Compter le nombre de façons différentes d'obtenir la somme 10.
- 4) Calculer alors la probabilité d'apparition de la somme 9 puis de la somme 10.
- 5) Le Duc de Toscane avait-il raison ?