Olympiades nationales de mathématiques 2018

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Académie de Bordeaux

Mercredi 14 mars 2018 de 8 h à 12 h 10

Pause de 10 h à 10 h 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »).

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées. Le mode examen n'est pas exigé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Si le candidat souhaite quitter la salle de composition avant la fin de l'épreuve, il doit rendre les énoncés.

1re Partie – 8 h à 10 h
Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Géométrie de l'à-peu-près*) et 2 (*Ensembles arithmétiques*), ceux des autres séries traitent les exercices numéros 1 (*Géométrie de l'à-peu-près*) et 3 (*Boules de même couleur*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Géométrie de l'à-peu-près

Mesures d'angles à peu près

On dit qu'un triangle ABC est à peu près rectangle en un sommet A si la mesure de l'angle en A est dans l'intervalle [75°, 105°]. On dit qu'un triangle ABC est à peu près isocèle en un sommet A si les mesures des angles en B et en C diffèrent de 15° au maximum.

1. ***a.*** Un triangle rectangle est-il à peu près rectangle ? Un triangle isocèle est-il à peu près isocèle ?
b. Un triangle peut-il être rectangle en deux sommets ? À peu près rectangle en deux sommets ? Le cas échéant, quand il est en plus acutangle (c'est-à-dire que tous ses angles sont aigus), est-il à peu près isocèle ?

2. Existe-t-il un triangle acutangle qui ne soit ni à peu près rectangle, ni à peu près isocèle ?

3. Écrire un programme (en langage naturel ou calculatrice), à recopier sur votre copie, testant si un triangle ABC dont on connaît les trois angles en A, B et C est à peu près isocèle.

Mesures de longueurs à peu près

Dans cette partie, on suppose qu'une unité de longueur a été donnée dans le plan, et on adopte les définitions suivantes :
- Deux points sont à peu près égaux si leur distance est inférieure ou égale à 0,1 ;
- Deux segments sont à peu près de même longueur si leurs longueurs diffèrent de 0,1 ou moins ;
- Un triangle est à peu près équilatéral si les longueurs de ses côtés diffèrent, deux à deux, de 0,1 ou moins.

4. ***a.*** Un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure (exactement) 1 peut-il être à peu près équilatéral ?
b. Un triangle rectangle peut-il être à peu près équilatéral ?

5. On considère un cercle, de centre O de rayon (exactement) 2 et deux points de ce cercle : A, fixe, et B, mobile. On appelle I le milieu du segment $[OA]$ et H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).
a. Représenter sur une figure l'ensemble des points B pour lesquels H et I sont à peu près égaux. En calculer la longueur (le résultat sera donné arrondi au centième).
b. Si H et I sont à peu près égaux, le triangle AOB est-il à peu près équilatéral ?

Une statistique sur la population des triangles

On convient de caractériser tout triangle ABC par les mesures x et y de ses angles en A et B. Chaque triangle (et avec lui ceux qui ont les mêmes angles, qui lui sont donc semblables) est représenté par le point de coordonnées (x, y) dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On choisit de représenter la mesure 10° par 1 cm.

6. Figurer sur un schéma (accompagné d'une légende explicite) :
a. Le domaine $\mathcal{T}$ constitué des points représentant tous les triangles ;
b. Le point E représentant les triangles équilatéraux ;
c. L'ensemble des points représentant les triangles rectangles.

7. ***a.*** Quelle partie $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles ?
b. Si on estime la proportion des triangles acutangles dans l'ensemble des triangles par le rapport de l'aire de $\mathcal{A}$ à l'aire de $\mathcal{T}$, quelle est cette proportion ?

8. Quelle partie $\mathcal{R}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles à peu près rectangles (au sens de la première partie) ? Quelle est leur proportion (dans le même sens que ci-dessus) dans l'ensemble des triangles ?

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Ensembles arithmétiques

Un ensemble S de rationnels est un ensemble arithmétique (en abrégé EA) si pour tout couple (a, b) avec a et b appartenant à S, il existe un élément c de S tel que l'un des nombres a, b ou c est la moyenne arithmétique (c'est-à-dire la demi-somme) des deux autres. On souhaite déterminer tous les entiers n strictement positifs pour lesquels il existe un EA ayant n éléments.

1. *a.* Les ensembles suivants sont-ils des EA ? Justifier.

$S_1 = \{0,1,2\}$ $\qquad$ $S_2 = \{0,1,2,3\}$ $\qquad$ $S_3 = \{0,1,2,4\}$ $\qquad$ $S_4 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$

b. Démontrer qu'il n'existe pas d'EA à 2 éléments. Que dire des singletons (ensembles à un seul élément) ?

c. Donner un EA ayant 5 éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0, 1 et 2.

2. *a.* Outre $\frac{a+b}{2}$, quels sont les deux autres rationnels à envisager pour vérifier qu'un couple (a, b) d'éléments de S ne fait pas échec à la définition d'un EA ?

b. On désire écrire un algorithme qui teste si un ensemble est un EA. L'ensemble S est encodé sous la forme d'une liste S = [S[1],..,S[n]] de taille n. Par exemple la moyenne arithmétique du $i$ème et du $j$ème élément de S s'écrit (S[i]+S[j])/2.

```
fonction TesterEA(S=[S[1],..,S[n]] , n)
        Resultat ← Vrai
        Pour i de 1 à n
                Pour j de 1 à n
                [...]
                Fin Pour
        Fin Pour
        Renvoyer(Resultat)
```

On dispose de plus d'une fonction Appartient(r,S) qui renvoie Vrai lorsque le rationnel r appartient à la liste S et Faux sinon. Compléter le squelette de la fonction ci-contre (à recopier sur sa feuille de composition) pour qu'elle renvoie Vrai si et seulement si S =[S[1],..,S[n]] est un ensemble arithmétique de longueur n.

c. Modifier la fonction pour qu'elle réalise moins d'opérations dans le cas général (à recopier sur sa feuille de composition).

3. Soit n un entier strictement supérieur à 2 et S un EA ayant n éléments dont le plus grand est noté M et le plus petit m. Aux éléments a de S, on associe les nombres $\frac{2(a-m)}{M-m}$. On constitue ainsi l'ensemble S'.
Démontrer que S' est un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0, 1 et 2.

4. Soit S un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0 et 2.
Démontrer que pour tout nombre réel x:

- Si x appartient à S et $0 < x < 1$ alors $\frac{x+2}{2}$ appartient à S ;
- Si x appartient à S et $1 < x < 2$ alors $\frac{x}{2}$ appartient à S.

En déduire qu'il n'existe pas de EA ayant 4 éléments.

5. Soit S un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0 et 2.

a. Démontrer que s'il existe un élément a_1 de S tel que $0 < a_1 < \frac{2}{3}$, alors il existe un élément a_2 de S tel que $0 < a_1 < a_2 < \frac{2}{3}$.
En déduire que S ne contient aucun nombre strictement compris entre 0 et $\frac{2}{3}$.

b. Démontrer, de façon analogue, que S ne contient aucun nombre strictement compris entre $\frac{2}{3}$ et 1.

c. En déduire que $n \leq 5$.

6. Quels sont les entiers n pour lesquels il existe un EA ayant n éléments ?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Boules de même couleur

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n boules pouvant être de différentes couleurs.
Le jeu consiste à extraire au hasard une boule de l'urne, puis sans remettre celle-ci dans l'urne à extraire une seconde boule de l'urne. Le joueur a gagné lorsque les deux boules tirées sont de la même couleur.
On admet qu'à chaque tirage, toutes les boules de l'urne ont la même probabilité d'être tirées.
On dit que le jeu est équitable lorsque la probabilité $P(G)$ que le joueur gagne est égale à $\frac{1}{2}$.

1. ***a.*** Démontrer que si l'urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 rouges alors $P(G) = \frac{7}{15}$.
b. Calculer $P(G)$ lorsque l'urne contient 12 boules dont 4 blanches, 6 rouges et 2 noires.

2. Dans cette question, l'urne contient 6 boules rouges et d'autres boules qui sont toutes blanches.

a. Soit x le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.
Démontrer que

$$P(G) = \frac{x(x-1)+30}{(x+6)(x+5)}$$

b. Combien faudrait-il de boules blanches pour que le jeu soit équitable ?

3. Dans cette question, l'urne ne contient que des boules de deux couleurs différentes.

a. On suppose que l'urne présente la configuration (a, b) c'est-à-dire qu'elle contient, par exemple, a boules rouges et b boules blanches. Démontrer que si le jeu est équitable alors $n = (a-b)^2$.

b. Réciproquement démontrer que si n est le carré d'un entier p alors il existe deux entiers naturels a et b avec $a \geq b$ que l'on exprimera en fonction de p tels que la configuration (a, b) conduise à un jeu équitable.

c. Donner six couples (a, b) conduisant à un jeu équitable.

4. Dans cette question, l'urne contient des boules de trois couleurs différentes selon la configuration (a, b, c), c'est-à-dire, par exemple, a boules blanches, b rouges et c noires.

a. Montrer que si $n = 13$, le jeu est équitable lorsque $a^2 + b^2 + c^2 = 91$. En déduire une configuration (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour $n = 13$.

b. Pour un nombre quelconque de boules, montrer que si le couple (x, y) conduit à un jeu équitable pour deux couleurs alors il existe une unique valeur de z non nulle telle que le triplet (x, y, z) conduise également à un jeu équitable pour trois couleurs.

c. Donner un triplet (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour trois couleurs.

5. On suppose que l'urne contient des boules de m couleurs différentes où $m \geq 2$.

Démontrer que la configuration $(1,3,9, \dots, 3^{m-1})$ conduit à un jeu équitable.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2018

Académie de Bordeaux

Mercredi 14 mars 2018 de 8 h à 12 h 10

Pause de 10 h à 10 h 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »).

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées. Le mode examen n'est pas exigé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Si le candidat souhaite quitter la salle de composition avant la fin de l'épreuve, il doit rendre les énoncés.

2e Partie – 10 h 10 à 12 h 10
Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Coloriage sous contraintes*) et 2 (*Des carrés et des cubes*), ceux des autres séries traitent les exercices numéros 1 (*Coloriage sous contraintes*) et 3 (*Neuf au pays des carrés*).

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Coloriage sous contraintes

Sur un tableau noir, on a écrit la liste des entiers compris entre 1 et $2n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. On souhaite colorier chaque nombre en bleu ou en rouge en respectant les deux contraintes suivantes :

(1) Il y a autant de nombres coloriés en bleu que de nombres coloriés en rouge.
(2) La somme des nombres coloriés en bleu est le double de celle des nombres coloriés en rouge.

Par exemple, pour $n = 3$, on a une solution en coloriant 3, 5 et 6 en bleu et 1, 2, 4 en rouge.

1. Etude de cas particuliers
- **a.** Etudier le cas où $n = 1$.
- **b.** Démontrer que le coloriage est impossible lorsque $n = 2$.
- **c.** Dans cette question, on suppose que n=4 et on désigne par S la somme des entiers qui doivent être coloriés en rouge.
  Calculer la valeur de S. En déduire un coloriage possible dans ce cas.
- **d.** Etudier les cas $n = 5$ et $n = 6$.

2. *On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, la somme des entiers compris entre 1 et n est égale à $\frac{1}{2}n(n + 1)$.*
On suppose que $n \geq 2$ et on désigne par E l'ensemble des entiers qui peuvent s'écrire sous la forme d'une somme de n entiers naturels distincts compris entre 1 et $2n$. On note a_n le plus petit élément de E et b_n le plus grand élément de E.
- **a.** Justifier que $a_n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.
- **b.** Exprimer b_n en fonction de n et a_n.
- **c.** Soit q un entier tel que $0 \leq q < n$.
  Démontrer que $a_n + qn$ est un élément de E.
  En déduire que $a_n + qn + 1$, $a_n + qn + 2$, …, $a_n + qn + n$ sont des éléments de E.
- **d.** En déduire que E est l'ensemble des entiers compris entre a_n et b_n.

3. On note S la somme des entiers qui doivent être coloriés en rouge. En désignant par k le quotient et par r le reste de la division euclidienne de n par 3, on a $n = 3k + r$ et $0 \leq r < 3$.
- **a.** Exprimer S en fonction de n.
- **b.** Démontrer que si $r = 2$ alors le coloriage est impossible.
- **c.** Qu'en est-il lorsque $r = 0$ ou $r = 1$?

4. Décrire un coloriage possible pour les entiers compris entre 1 et 2018.

Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Des carrés et des cubes

Partie A : Somme de deux carrés

1. On suppose qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que :

$$a \leq b \text{ et } 2018 = a^2 + b^2.$$

a. Justifier que $a \leq 31$.

b. Démontrer que si a et b sont pairs alors $a^2 + b^2$ est un multiple de 4.

c. Démontrer que a et b ne peuvent pas être de parités différentes. Que peut-on en déduire pour a et b ?

d. Quels sont les chiffres des unités possibles pour le carré d'un entier naturel impair ? En déduire que le chiffre des unités de a ne peut-être ni 1, ni 5, ni 9.

2. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $2018 = a^2 + b^2$.

Partie B : Somme de deux cubes

1. Soient a et b deux entiers naturels non nuls, on pose $N = a^3 + b^3$.

a. Démontrer que

$$N = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{et } 4N - (a+b)^3 = 3(a+b)(a-b)^2$$

b. En déduire que N possède un diviseur d tel que $N \leq d^3 \leq 4N$.

c. Existe-t-il deux entiers naturels a et b tels que $2018 = a^3 + b^3$? On rappelle que 1009 est un nombre premier.

2. Dans cette question $N = 62558$.

a. Vérifier que N est un multiple de 2018.

b. On suppose qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que $N = a^3 + b^3$.
Quelles sont les valeurs de $a + b$ et $a^2 - ab + b^2$?

c. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $62558 = a^3 + b^3$.

3. Ecrire un algorithme qui permet de montrer que 62558 est le plus petit multiple de 2018 qui peut s'écrire comme somme de deux cubes d'entiers naturels non nuls.

Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que S)

Neuf au pays des carrés

Dans cet exercice on s'intéresse aux nombres entiers qui sont des carrés parfaits dont le chiffre des unités est égal à 9 : 9, 49, 169, …, 1369, …

On note E la liste rangée par ordre croissant de ces carrés.

1. Quel est le nombre suivant 1369 dans la liste E ?

2. Soit $a = b^2$ le carré d'un entier naturel b.

- **a.** Quel doit-être le chiffre des unités de b pour que a soit un nombre de la liste E ?
- **b.** En déduire que les éléments de E sont les entiers qui peuvent s'écrire sous la forme $(10d + u)^2$ où d est un entier naturel et $u \in \{3, 7\}$.
- **c.** Quel est le 2018^{e} nombre de la liste E ?

3. Démontrer que la différence entre deux nombres successifs de la liste E est un multiple de 40.

Est-ce vrai pour la différence entre deux nombres quelconques de la liste E ?

4. On prend au hasard un nombre parmi les 2018 premiers nombres de la liste E.

- **a.** Quelle est la probabilité p_1 qu'il se termine par 19 ?
- **b.** Quelle est la probabilité p_2 qu'il se termine par 69 ?