Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

académie Bordeaux

Académie de Bordeaux

Mercredi 15 mars 2017 de 8 h à 12 h 10

Pause de 10 h à 10 h 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). **Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10 h.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Si le candidat souhaite quitter définitivement la salle avant la fin de l'épreuve (12 h 10), il doit rendre les énoncés.

1re partie - 8 h à 10 h
Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Somme de carrés en abyme*) et 2 (*1,2,3 … dallez !*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Somme de carrés en abyme*) et 3 (*Boîte de canelés bordelais*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Sommes de carrés en abyme

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.
Ainsi, par exemple, $f(5) = 5^2 = 25, f(29) = 2^2 + 9^2 = 85, f(132) = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$.

Introduction

1. *a.* Calculer $f(1)$, $f(11)$ et $f(111)$. Démontrer que tout entier naturel non nul admet au moins un antécédent par f.
b. Calculer $f(23), f(32)$ et $f(320)$.
c. Démontrer que tout entier naturel non nul admet une infinité d'antécédents par f.

La suite des images successives d'un entier

Étant donné un entier naturel non nul u_0, on considère la suite de nombres définie par u_0 et par ses images successives par f notées $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, …, $u_{n+1} = f(u_n)$, etc.
2. Calculer les cinq premiers nombres de cette liste pour $u_0 = 301$, puis pour $u_0 = 23$ et pour $u_0 = 1030$.
Que peut-on en déduire pour les termes suivants de chacune de ces trois listes ?
3. Calculer les nombres $u_0, u_1, u_2, \dots u_8$ pour $u_0 = 4$.
Quels sont les nombres suivants de la liste dans ce cas ?

Étude d'une propriété

On souhaite démontrer la propriété suivante, notée $\mathcal{P}$ dans la suite du problème :
Si u_0 est un entier non nul :
- soit, il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, $u_n = 1$.
- soit, il existe un rang M tel que $u_M = 4$, et les termes suivants sont alors 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4,…
On dit dans ce cas que la suite est périodique, de période 8, à partir du rang M.

On dispose de l'algorithme ci-contre.

4. *a.* Qu'affiche cet algorithme lorsque l'on saisit en entrée la valeur $u = 42$?
b. Justifier que si l'algorithme affiche « propriété vérifiée» pour une valeur u donnée alors u vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
c. Comment le programme se comporterait-il si un nombre u ne vérifiait pas la propriété $\mathcal{P}$?
d. Tous les entiers naturels compris entre 1 et 99 vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Expliquer comment cet algorithme peut permettre de le prouver.

Variable : u *entier naturel non nul*

Entrer u
  Tant que $(u \neq 1 \; et \; u \neq 4)$
  $u \leftarrow f(u)$
  Afficher u
Fin tant que
Afficher « propriété vérifiée »

Extension aux écritures à trois chiffres

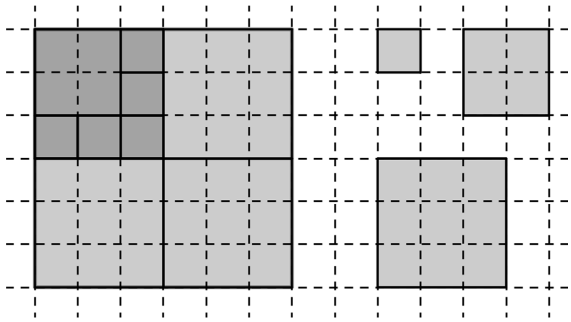
On souhaite montrer que la propriété $\mathcal{P}$ s'étend aux entiers naturels non nul u_0 s'écrivant avec trois chiffres.
5. Soient a, b et c des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 tels que $a \neq 0$ et soit $x = 100a + 10b + c$.
a. Montrer que $x - f(x) \geq 99 + c - c^2 > 0$ et en déduire que $f(x) \leq x - 1$.
b. Si u_0 s'écrit avec trois chiffres, montrer qu'il existe un rang J tel que $u_J \leq 99$. Conclure.

Généralisation

On souhaite montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul u_0.
6. *a.* Montrer que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 4, on a : $81p < 10^{p-1}$.
b. En déduire que, si un terme u_n de la suite s'écrit avec p chiffres $(p \geq 4)$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ s'écrit avec au plus $p - 1$ chiffres.
c. Montrer que pour tout entier u_0 il existe un rang K tel que $u_K \leq 999$. Conclure.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

1,2,3 …dallez !



Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul.
Une unité de longueur étant donnée, on considère un carré de côtés de longueur n. On note ce carré K_n, et on se propose de le paver à l'aide de carrés de côtés de longueur 1, 2 ou 3, c'est-à-dire de le recouvrir sans débordement ni chevauchement.
Par commodité, on dira qu'un carré de côtés de longueur i (i valant 1, 2 ou 3) est de taille i.
On montre ci-contre un pavage du carré K_6 comportant cinq carrés de taille 1, un de taille 2 et trois de taille 3.

1. ***a.*** Est-il possible de paver le carré K_6 en n'utilisant aucun carré de taille 1 ?
b. Montrer qu'il n'est pas possible de paver le carré K_5 sans utiliser de carré de taille 1.
c. Donner un pavage de K_5 comportant quatre carrés de taille 1. On admettra dans la suite qu'il n'existe pas de pavage de K_5 avec des carrés de taille 1, 2 ou 3 comportant strictement moins de quatre carrés de taille 1.

Tout carré K_n peut être pavé avec n^2 carrés de taille 1. Certains K_n peuvent l'être sans en utiliser. Dans cet exercice, on détermine le nombre minimal de carrés de taille 1 nécessaires au pavage du carré K_n par des carrés de taille 1, 2 ou 3 ; on note $u(n)$ ce nombre.

2. Déterminer $u(1)$, $u(8)$ et $u(9)$.

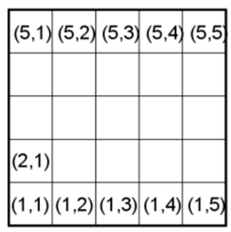
3. Plus généralement, que vaut $u(n)$ si n est pair ? Que vaut $u(n)$ si n est un multiple de 3 ?

On s'intéresse donc dorénavant aux entiers n impairs et non multiples de 3.

4. ***a.*** Montrer que si n est impair et non multiple de 3, alors $n + 6$ est impair et non multiple de 3.
b. Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 4 : $u(n + 6) \leq u(n)$ (on considérera les carrés K_{n+6} et K_n).

5. ***a.*** Peut-on paver un rectangle de largeur 5 et de longueur 6 en utilisant des carrés de tailles 2 et 3 ? En déduire que $u(11) \leq 1$.
b. Montrer que $u(13) \leq 1$.
c. On admet que $u(5) = 4$ (comme dit plus haut) et que $u(7) = 3$. Montrer que, pour tout entier n impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11, $u(n) \leq 1$.

Les carrés de taille 1 sont-ils indispensables ?



6. Pour tout entier n impair, on partage le carré K_n en n^2 cases carrées de taille 1 et on repère chaque case par un couple (i, j) où i est le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne en partant de la case inférieure gauche (sur la figure, $n = 5$).
On affecte ensuite à chacune des cases, à partir du couple (i, j) qui la repère, le coefficient -1 si i et j sont pairs, 1 si i et j sont impairs et 0 sinon.
a. Exprimer en fonction de n, la somme des coefficients de toutes les cases de K_n.
b. Démontrer que, si un carré de taille 3 fait partie d'un pavage du carré K_n, alors la somme des coefficients de toutes les cases qu'il recouvre est 3, 0 ou −3.
c. Quelle est la somme des coefficients des cases d'un carré de taille 2 utilisé dans les mêmes conditions ?
d. Quelle est la somme des coefficients d'un carré pavé par des carrés de taille 2 ou 3 ?
e. Conclure que, pour tout entier n :
- $u(n) = 0$ si n est un multiple de 2 ou de 3 ;
- $u(n) = 1$ si n est impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11.

f. Que vaut $u(2017)$?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries **autres** que la série S)

Boîtes de canelés bordelais (spécialités pâtissières)

C'est du gâteau

Une pâtisserie propose des boîtes de canelés bordelais de diverses contenances : des conditionnements par 6, par 9, par 12 et par 16 sont possibles.

1. Peut-on acheter 10 canelés, 20 canelés, 30 canelés ?

2. *a.* Établir la liste des quantités, inférieures à 30, qu'on ne peut pas réaliser en achetant plusieurs boîtes.

b. Montrer que, s'il existe un entier n tel que tout achat de $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ canelés soit possible, alors il est possible d'acheter toute quantité de canelés supérieure ou égale à n.

c. Déterminer le plus petit entier n réalisant la condition précédente.

3. *a.* Pourrait-on commander 50 canelés si les conditionnements possibles étaient 6, 9, 12 et 15 ?

b. Y aurait-il dans ce cas un seuil au-delà duquel toute quantité soit réalisable ?

Un algorithme glouton mais peu performant

Pour conditionner une commande de n canelés, on peut appliquer un algorithme (qualifié de *glouton*) consistant à utiliser un maximum de boîtes de la plus grande taille, puis de placer ce qui reste dans des boîtes de taille immédiatement inférieure, etc.

4. *a.* Que donne cette méthode s'il s'agit de répartir 60 canelés dans des boîtes de 16, 12, 9 et 6 ?

b. Et pour répartir 75 canelés ?

c. Pourrait-on conditionner les 75 canelés en procédant autrement ?

5. On s'autorise à présent des emballages individuels, mais on souhaite limiter le nombre de boîtes utilisées.

a. Combien de boîtes de 12, 8, 6 et 1 faudrait-il utiliser pour conditionner 41 canelés en utilisant l'algorithme glouton ?

b. Le même total est-il réalisable avec moins de boîtes (évidemment, sans appliquer l'algorithme) ?

6. Quels conditionnements peut-on réaliser en utilisant une boîte de chaque sorte au maximum parmi 5 boîtes de capacités 1, 2, 4, 8, 16 ?

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Bordeaux

Mercredi 15 mars 2017 de 8 h à 12 h 10

Pause de 10 h à 10 h 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). **Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10 h.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Si le candidat souhaite quitter définitivement la salle avant la fin de l'épreuve (12 h 10), il doit rendre les énoncés.

2e partie - 10 h 10 à 12 h 10
Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Une curieuse calculatrice*) et 2 (*Tartarin et les canards migrateurs*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Une curieuse calculatrice*) et 3 (*Des jetons et des gommettes*).

Exercice académique n° 1 (à traiter par tous les candidats)

Une curieuse calculatrice !

Cette calculatrice comporte un clavier comprenant les 10 chiffres qui servent à écrire un nombre sur l'écran, ici 15743.

On dispose également d'une touche `PROG` qui exécute un programme préalablement installé sur la calculatrice et qui s'applique au nombre écrit sur l'écran.

Le programme installé actuellement sur la calculatrice est le suivant :

« Ajouter le chiffre des unités multiplié par 4 au nombre formé par les chiffres qui le précédent. »

Par exemple si l'on appuie sur la touche `PROG`, on obtiendra l'affichage du nombre $3 \times 4 + 1574 = 1586$.

1. Quel sera l'affichage si l'on appuie encore trois fois sur la touche `PROG` ?

2. Donner les 5 premiers affichages obtenus à partir du nombre 2354.

Dans la suite, on désigne par N le nombre affiché, par U le chiffre des unités de N et par D le nombre de dizaines de N. Ainsi $N = 10D + U$. On note N' le nombre affiché après appui sur la touche `PROG`.

3. **a.** Montrer que si N est un multiple de 13 alors N' est aussi un multiple de 13.

b. Montrer que si N' est un multiple de 13 alors N l'est également.

c. Que peut-on en déduire pour 15743 ?

4. Démontrer que :

a. Si $N \geq 40$ alors $N > N'$.

b. Si $N < 40$ alors $N' < 40$.

5. **a.** Déterminer les entiers N qui restent inchangés quand on appuie sur la touche `PROG`.

b. En déduire que 2354 n'est pas un multiple de 13.

c. Enoncer un critère de divisibilité par 13 utilisant la calculatrice précédente.

6. **a.** À quel critère de divisibilité correspond le programme $N' = D + 6U$?

b. En modifiant uniquement la valeur par laquelle on multiplie le chiffre des unités dans le programme de la calculatrice, énoncer des critères de divisibilité semblables au précédent et concernant les nombres 3, 7, 11, 19, 23, 29.

Exercice académique n° 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Tartarin et les canards migrateurs

On considère l'application f qui à tout couple d'entiers naturels (x, y) associe l'entier défini par

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2.$$

1. **a.** Démontrer que pour tout couple (x, y) d'entiers

$$(P_1) \qquad f(3x + 4y, 2x + 3y) = f(x, y).$$

b. Démontrer que si x, y, u, v sont des entiers, alors

$$(P_2) \qquad f(x, y)f(u, v) = f(xu + 2yv, xv + yu)$$

2. **a.** Vérifier que le couple $(45,2)$ est solution de l'équation $f(x, y) = 2017$.

En déduire deux autres couples solutions de cette équation.

b. Déterminer un couple solution de chacune des équations suivantes

$$f(x, y) = 4034 \qquad\qquad f(x, y) = -2017$$

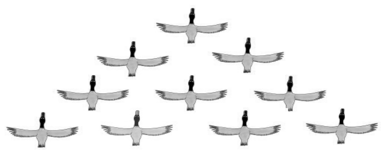
3. On se propose de déterminer des couples solutions de l'équation (E) : $f(x, y) = 3$.

a. Montrer que si (a, b) est solution de cette équation, alors a est impair.

b. On pose $a = 2a' + 1$. Montrer que b est impair.

c. En posant $b = 2b' + 1$, démontrer que l'équation (E) n'a pas de solution.

4. On admet que les canards migrateurs, lorsqu'ils se déplacent, constituent des vols ayant la forme suivante dite en triangle.



Si un vol de n rangées est complet, le nombre de canards de ce vol est égal à

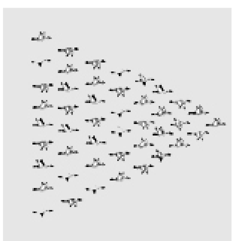
$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tartarin raconte qu'un jour où il était à la chasse il a vu arriver un vol complet de canards, **entre cent et mille** à coup sûr ! Son coup de fusil ne tua aucun oiseau mais, surpris, les volatiles se scindèrent en deux groupes formant deux triangles complets de même effectif.

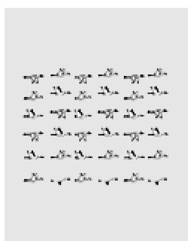
a. Montrer que si a et b désignent respectivement le nombre de rangées du grand et des petits triangles alors $f(2a + 1, 2b + 1) = -1$.

b. Quel peut être le nombre de canards aperçus par Tartarin ?

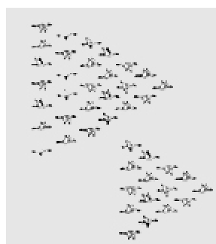
5. Tartarin raconte encore que le lendemain un autre vol de canards, encore plus important que la veille, **entre mille et deux mille**, est passé au-dessus de sa tête. Son coup de fusil n'a encore touché aucun oiseau mais le vol s'est soudain mis en forme de carré avant de se séparer quelques instants plus tard en deux vols triangulaires d'effectifs différents.



Avant le coup de fusil



Après le coup de fusil



Après la séparation

Quel est l'effectif total des canards et celui de chacun de ces deux vols ?

Exercice académique n° 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Des jetons et des gommettes !

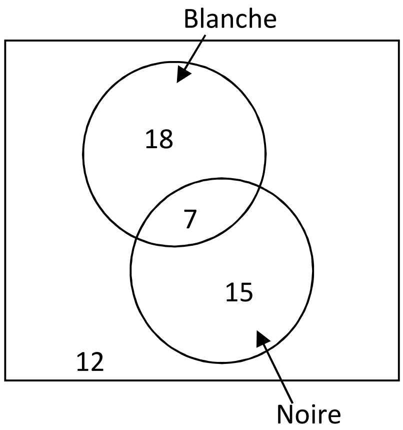
On dispose d'un sac contenant un grand nombre de jetons sur lesquels peuvent être collées des gommettes en couleur.

On suppose que chaque jeton porte 0, 1 ou 2 gommettes, chacune étant de couleur blanche ou noire.

Si on prélève dans ce sac un certain nombre de jetons, la répartition des jetons peut être représentée par un diagramme.

Par exemple, sur le diagramme ci-contre on comprend facilement que l'on a prélevé 52 jetons et que parmi ces jetons :

- 25 jetons portent au moins une gommette blanche,
- 7 portent une gommette blanche et une gommette noire,
- 22 portent au moins une gommette noire,
- 12 ne portent aucune gommette blanche et aucune gommette noire.



1. On prélève 100 jetons dans le sac. On constate que 30 portent au moins une gommette blanche et 50 au moins une gommette noire.

a. Quel est le nombre minimum de jetons portant une gommette noire et une gommette blanche ? Donner un diagramme correspondant à ce minimum.

b. Quel est le nombre maximum de jetons qui portent une gommette blanche et une gommette noire ? Donner un diagramme correspondant à ce maximum.

2. Reprendre les mêmes questions avec un prélèvement de 100 jetons dans lequel on en dénombre 60 qui portent au moins une gommette blanche et 70 qui portent au moins une gommette noire.

On suppose désormais que chaque jeton porte 0, 1, 2 ou 3 gommettes, chacune étant de couleur blanche, rouge ou noire.

3. On effectue un prélèvement de 100 jetons. On constate que 60 d'entre eux portent au moins une gommette blanche, 80 au moins une gommette noire et 80 au moins une gommette rouge. De plus, 85 jetons portent au moins deux gommettes de couleurs différentes et 5 jetons ne portent aucune gommette.

Déterminer le nombre de jetons tricolores c'est-à-dire portant trois gommettes de couleurs toutes différentes. Donner un diagramme illustrant cette situation.

4. Dans cette question, on suppose que l'on a prélevé 100 jetons tels que que 60 d'entre eux portent au moins une gommette blanche, 80 au moins une gommette noire et 80 au moins une gommette rouge. Quel est le nombre minimum de jetons tricolores ? Donner un diagramme illustrant cette situation.