Éléments de solution
Exercices nationaux

Exercice 1 (pour tous)

1., 2. et 3.

n	6	101	361	2 021
Les diviseurs de n	1; 2; 3; 6	1; 101	1; 19; 361	1, 43; 47; 2 021
$S(n)$	12	102	381	2 112
$2S(n)$	24	204	762	4 224
$(n+1)N(n)$	28	204	1 086	8 088

4. *a.* Chaque diviseur de n figure deux fois dans la somme $T(n)$, donc $T(n) = 2S(n)$.
b. $ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$ fait apparaître $ab - a - b + 1$ comme produit de nombres positifs, d'où le résultat.
c. Application au cas $dq = n$.
d. Dans l'écriture de $T(n)$, on regroupe les termes par deux, et on « somme » les inégalités obtenues pour obtenir l'inégalité générale.

5. *a.* La seule façon de faire qu'une somme de termes tous positifs tous majorés par le même nombre soit égale au produit de ce majorant par le nombre de termes est que chaque terme soit égal à ce majorant. On a donc, pour chaque diviseur de n : $(d-1)(q-1) = 0$.
b. Les seules valeurs admissibles pour d sont donc 1 ou n. n est donc un nombre premier.
c. Réciproquement, si n est premier, ses diviseurs sont 1 et n, leur somme est $n+1$ et leur effectif 2, donc l'égalité (*) est satisfaite.

Exercice 2 (spécialistes)

A. Quelques exemples

1. *a.* $7 = 2 + 5$ et $7^2 = 2 \times 22 + 5$, donc 7 est 22 −décomposable.
On peut essayer les décompositions possibles de 7 en sommes d'entiers inférieurs :
$0 \times 10 + 7 = 7, 1 \times 10 + 8 = 18, 2 \times 10 + 5 = 25, 3 \times 10 + 4 = 34, 4 \times 10 + 3 = 43, 5 \times 10, 6 \times 10$ et 7×10 sont supérieurs à 49. Donc 7 n'est pas 10 −décomposable.
b. $45 = 20 + 25$ et $2\,025 = 20 \times 100 + 25$ donc 45 est 100 −décomposable.
2. *a.* Dire que a est 1 −décomposable, c'est dire qu'il existe des entiers q et r tels que $a = q + r$ et $a^2 = q \times 1 + r$, ce qui nécessite $a = a^2$. 0 et 1 sont donc les seuls possibles, et ils possèdent effectivement la propriété, les couples associés étant $(0,0)$ et $(1,0)$ (et aussi $(0,1)$).
b. Dire que a est 2 −décomposable, c'est dire qu'il existe des entiers q et r tels que $a = q + r$ et $a^2 = 2q + r$, ce qui nécessite que $a(a-1) = q$. Comme $q \leq a$ et qu'on parle d'entiers positifs, il s'ensuit que $a - 1 \leq 1$. Les trois possibilités sont donc $2, 1$ et 0. On vérifie comme précédemment que ces trois valeurs conviennent.
3. *a.* $N^2 = N \times N = 0$ donne la réponse, N est N −décomposable.
b. $(N-1)^2 = (N-2) \times N + 1$ donne la réponse : $(N-1)$ est N −décomposable.
c. Une égalité telle que $4 = a \times N + b$ ne saurait avoir lieu que pour $a = 0$, sinon le second membre est strictement supérieur au premier, et pour $a = 0$, on obtient $4 = 2$.

B. Une étude des nombres N −décomposables

1. *a.* Si k est N −décomposable, il existe des entiers q et r tels que $k = q + r$ et $k^2 = q \times N + r$. Comme q et r sont inférieurs ou égaux à k, on en déduit $k^2 \leq k(N+1)$, et $k \leq N+1$.
Est-il possible que k soit égal à $N+1$?
Si cela était, il existerait un entier a tel que $(N+1)^2 = aN + (N+1-a)$, ou encore $N(N+1) = a(N-1)$, qui conduit à $a > N+1$, impossible dans notre hypothèse. Donc $k \leq N$.
b. Les entiers 3 −décomposables sont inférieurs ou égaux à 3 d'après ce qui précède, et les résultats de la partie A permettent de conclure positivement pour 3 et 2. 1 et 0 sont, quel que soit N, N −décomposables (avec les couples $(0,0)$ et $(0,1)$).
La partie A a aussi résolu le cas de 2 comme non 4 −décomposable. Il ne reste donc que 4, 3, 1 et 0 qui le soient.

2. Supposons que pour un couple (k, N), il existe deux entiers p et q tels que :

$$\begin{cases} k^2 = pN + k - p \\ k^2 = qN + k - q \end{cases}$$

Nécessairement, $(N-1)(p-q) = 0$ et comme $N \geq 2$ l'unicité est démontrée.

3. *a.* On peut écrire $k^2 = qN + k - q$ (en utilisant directement $k = q + r$), ou encore $k^2 - k - q(N-1) = 0$. L'existence du couple (q, r) induit le fait que k est solution de cette équation.
b. Réciproquement, s'il existe un entier q compris entre 0 et k tel que k soit solution de cette équation, alors en posant $r = k - q$, on revient bien au système (S).
c. Essayons d'écrire différemment k et $N-1$ pour faire apparaître l'équation précédente :

$$k^2 - k = 2^{2p-2}(2^p - 1)^2 - 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)(2^{2p-1} - 2^{p-1} - 1)$$
$$k^2 - k = 2^{p-1}(2^p - 1)(2^{2p-1} - 2^p + 2^{p-1} - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)(2^p + 1)(2^{p-1} - 1)$$
$$k^2 - k = 2^{p-1}(2^{p-1} - 1)(2^{2p} - 1)$$

Dans cette dernière égalité, on reconnaît le facteur $N-1$, précédé de $2^{p-1}(2^{p-1} - 1)$, entier inférieur à k.

4. Calculons $(N-k)^2 - (N-k) = N(N-1) + k^2 - k - 2Nk + 2k = (N-1)(N-2k+q)$
(la lettre q qui apparaît dans cette dernière expression est liée précédemment à k). Le dernier facteur est bien inférieur à $N-k$ (c'est $N-k-(k-q)$).
5. Posons $N = 2k$ et écrivons la condition nécessaire et suffisante établie plus haut : il existe un entier q compris entre 0 et k tel que $k^2 - k - q(2k-1) = 0$. On a donc $k(k-1) = q(2k-1)$, qui assure que $k(k-1)$ est un multiple de $2k-1$. D'où on tire que $4k(k-1)$, qui est égal à $(2k-1)^2 - 1$ est lui aussi un multiple de $(2k-1)$ et donc 1 en est un aussi. Impossible.

6. On a montré que les entiers N −décomposables sont inférieurs à N. D'après la question précédente, $\frac{N}{2}$ – un entier dans le cas où N est pair – ne l'est pas. Par ailleurs, si k est N −décomposable, $N-k$ l'est aussi. On peut donc regrouper les entiers N −décomposables par paire $\{k, N-k\}$. Il y en a donc un nombre pair.

7. Posons $N - 1 = p$. La condition nécessaire et suffisante : il existe une entier q inférieur ou égal à k tel que $k(k-1) - qp = 0$ indique que p divise $k(k-1)$, et comme p est un nombre premier, il divise un des deux facteurs. Les possibilités sont $k = 0, k = 1, k = N-1, k = N$.

8. La condition $k(k-1) = qN$. Montre que les nombres N tels que k soit N −décomposable sont des diviseurs de $k(k-1)$. Il y en a donc un nombre fini.

Exercice 3 (non spécialistes)

1. *a.* proposition fausse car, par exemple, $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$ et ce n'est pas une fraction égyptienne.
b. proposition vraie car pour tous les entiers n et p non nuls, $\frac{1}{n} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{np}$ et np est un entier non nul.
c. proposition fausse car, par exemple, $\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1}$ et ce n'est pas une fraction égyptienne.
2. *a.* On peut proposer les deux décompositions $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. On en déduit qu'il peut ne pas y avoir unicité de la décomposition égyptienne d'un nombre rationnel.

b. $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ et $\frac{9}{10}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$

3. ***a.*** Comme la base de la pyramide SABCD est un carré et ses faces sont des triangles isocèles en S, la somme des longueurs des arêtes de cette pyramide SABCD est $4\mathrm{AB}+4\mathrm{SA}$.

Donc $4\mathrm{AB}+4\mathrm{SA}=\frac{4}{30}+\frac{4}{20}=\frac{2}{15}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$ qui est une fraction égyptienne. On en déduit que SABCD est une pyramide égyptienne.

b. Pour les mêmes raisons que dans le cas particulier de la question **a.**, $4\mathrm{AB}+4\mathrm{SA}=\frac{4}{p}+\frac{4}{q}$.

Si $p<4$ ou $q<4$, alors, puisque les nombres considérés sont strictement positifs, on a $\frac{4}{p}>1$ ou $\frac{4}{q}>1$ et, dans les deux cas, $4\mathrm{AB}+4\mathrm{SA}>1$. Donc $4\mathrm{AB}+4\mathrm{SA}$ ne peut pas être une fraction égyptienne (qui est nécessairement strictement inférieure à 1) donc SABCD n'est pas une pyramide égyptienne.

On en déduit que si SABCD est une pyramide égyptienne alors $p\geq 4$ et $q\geq 4$.

c. SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $4\mathrm{AB}+4\mathrm{SA}=\frac{1}{n}$.

Or, en réduisant au même dénominateur, $4\mathrm{AB}+4\mathrm{SA}=\frac{4}{p}+\frac{4}{q}=\frac{4p+4q}{pq}$

Donc SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n=\frac{pq}{4p+4q}$.

d. Par ce qui précède, SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n=\frac{pq}{4p+4q}$ qui s'écrit $4n(p+q)=pq$.

Pour tous entiers naturels p et q non nuls, $4n(p+q)$ est un nombre pair.

Si p et q sont des nombres impairs alors pq est aussi un nombre impair.

L'égalité $4n(p+q)=pq$ est impossible si p et q sont impairs.

Éléments de solution
Exercices académiques

Exercice 1

Un sur deux

1. Les listes restantes sont successivement : 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 2; 5, 6, 7, 8, 9, 10, 2, 4 ; 7, 8, 9, 10, 2, 4, 6 ; 9, 10, 2, 4, 6, 8 ; 2, 4, 6, 8, 10 ; 6, 8, 10, 4 ; 10, 4, 8 ; 8, 4 ; 4

   Donc $f(10) = 4$.

2. $f(2) = 2$ $f(3) = 2$ $f(4) = 4$ $f(5) = 2$
   $f(6) = 4$ $f(7) = 6$ $f(8) = 8$ $f(9) = 2$

3. Ce programme donne la liste des nombres restants en commençant par le premier nombre à effacer.

```
def Unsurdeux(n):
        L=[]
        for i in range(1,n+1):
            L.append(i)
        while len(L)>1:
            ListeSuivante(L)
        print(L[0])
```

4. Les impairs sont effacés dès le premier tour du cercle. $f(n)$ ne peut donc pas être impair.
5. Conjecture : si n est une puissance de 2 alors $f(n) = n$. On vérifie que $f(16) = 16$.
6. a) Le numéro rencontré est 6

   b) Après avoir effacé trois numéros, il en reste 16. Comme $f(16) = 16$, le nombre restant est celui qui précède le premier que l'on va effacer soit 6. Ainsi $f(19) = 6$.

7. a) Le numéro suivant qui sera effacé est 2.

   b) Il reste p nombres qui sont dans l'ordre 2, 4, …, $2p$ qui sont les doubles de 1, 2, …, p.

   Avec 1, 2, …, p il reste $f(p)$ donc avec 2, 4, …, $2p$ il reste $2f(p)$. Ainsi $f(n) = 2f(p)$.

8. a) Pour tout entier naturel k, $u_{k+1} = f\left(2^{k+1}\right) = f\left(2 \times 2^k\right) = 2f\left(2^k\right) = 2u_k$.
   La suite (u_k) est une suite géométrique de raison 2.

   b) $u_k = 2^{k-1}u_1 = 2^{k-1} \times 2 = 2^k$

9. On a $2^{k_n-1} < n \leq 2^{k_n}$ donc $n = 2^{k_n-1} + m$ où $0 < m \leq 2^{k_n-1}$.
   $2m \leq 2n - 2^{k_n} \leq n$ donc les m premiers nombres effacés sont impairs.

   Après avoir effacé m nombres, il reste une liste de 2^{k_n-1} nombres dont le premier à effacer est $2m + 1$ et le dernier $2m$. Comme $f\left(2^{k_n-1}\right) = 2^{k_n-1}$, on a $f(n) = 2m$.

   Ainsi $f(n) = 2\left(n - 2^{k_n-1}\right) = 2n - 2^{k_n}$.

10. $2^{10} < 2021 < 2^{11}$ donc $k_{2021} = 11$ d'où $f(2021) = 2 \times 2021 - 2^{11} = 1994$.
11. Si $f(n) \geq 2021$, comme $f(n)$ est pair on a $f(n) \geq 2022$.
    Or $f(n) = 2n - 2^{k_n} \leq 2 \times 2^{k_n} - 2^{k_n} \leq 2^{k_n}$ donc $2^{k_n} \geq 2021$ donc $k_n \geq 11$.

    Pour $k_n = 11$, $f(n) \geq 2021$ équivaut à $2n - 2^{11} \geq 2022$ soit $n \geq 2035$.

Pour $k_n > 11$,on a $n > 2^{11}$ donc $n > 2035$.

Le plus petit entier n tel que $f(n) \geq 2021$ est donc 2035.

Exercice 2

Nuage bleu !

1. Pour $n = 2$, $f(\mathcal{E}) = 1$. (figure : un segment et son milieu)
   Pour $n = 3$, $f(\mathcal{E}) = 3$. (figure : un triangle et les milieux des côtés)

   Pour $n = 4$, $f(\mathcal{E}) = 6$ ou $f(\mathcal{E}) = 5$. (figure - un quadrilatère (parallélogramme ou non parallélogramme) et les milieux des côtés et des diagonales)

2. a) $f(\mathcal{E})$ est inférieur ou égal au nombre de segments joignant deux points distincts de $\mathcal{E}$.
   b) $f(\mathcal{E}) < \frac{1}{2}n(n-1)$ si et seulement si il existe un parallélogramme dont les sommets appartiennent à $\mathcal{E}$.

3. a) Le milieu de $[K_aK_b]$ a pour abscisse $(2^a + 2^b)/2$ et celui de de $[K_cK_d]$ a pour abscisse $(2^c + 2^d)/2$ d'où $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$.
   b) On en déduit $1 + 2^{b-a} = 2^{c-a}(1 + 2^{d-c})$.

   Comme $a < b$, le premier membre est impair donc $c - a = 0$ soit $c = a$. Ce qui donne $2^{b-a} = 2^{d-c}$ donc $b - a = d - c = d - a$ soit $b = d$.

   C'est impossible car les segments $[K_aK_b]$ et $[K_cK_d]$ sont supposés distincts.

   c) $f(\mathcal{E}_1) = \frac{1}{2}n(n-1)$

   d) Valeur maximale : $\frac{1}{2}n(n-1)$.

4. a) $AC + BD = 2AI + 2IB = 2(AI + IB) \geq 2AB$.
   b) Comme AB est de longueur maximale, $AC \leq AB$ et $BD \leq AB$ et aucune de ces inégalités ne peut être stricte sinon on aurait $AC + BD < 2AB$ en contradiction avec a.

   On a donc $AC = AB = BD$ d'où $AI = BI$ et $AI + IB = AB$. On en déduit que I est le milieu de $[AB]$. Comme I est aussi le milieu de $[BD]$, $D = A$. Ce qui est exclu car $[BD]$ appartient à Y.

5. $card(X) = n - 1$ et $card(Y) = n - 2$.
   D'après 4. les milieux des segments appartenant à X sont distincts des milieux des segments appartenant à Y donc les milieux des segments appartenant à $X \cup Y$ sont au nombre de $card(X) + card(Y) = n - 1 + n - 2 = 2n - 3$. Ainsi $f(\mathcal{E}) \geq 2n - 3$.

6. a) Soit I est le milieu d'un segment $[L_aL_b]$ où $1 \leq a < b \leq n$. Son abscisse est $x = a + b$.
   On a $3 \leq x \leq 2n - 1$.

   Réciproquement

   - si $3 \leq y \leq n + 1$ alors le point d'abscisse y est le milieu de $[L_1L_{y-1}]$.

   - si $n + 2 \leq y \leq 2n - 1$ alors le point d'abscisse y est le milieu de $[L_{y-n}L_n]$.

   Ainsi $f(\mathcal{E})$ est le nombre d'entiers $x$tels que $3 \leq x \leq 2n - 1$ donc

   $f(\mathcal{E}) = (2n - 1) - 3 + 1 = 2n - 3$.

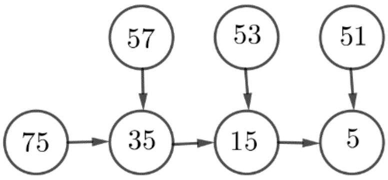
   b) Compte tenu de 5 et 6, la valeur minimale de $f(\mathcal{E})$ est $2n - 3$.

Exercice 3

Produits des chiffres

1. $2677889 \to 338688 \to 27648 \to 2688 \to 768 \to 336 \to 54 \to 20 \to 0$

2. a.



b. $105 = 3\times5\times7$, donc 357, 375, 537, 573, 735 et 753 en sont des géniteurs.

c. $357 = 3\times7\times17$, $375 = 3\times5\times5\times5$, $537 = 3\times179$, 573= $573 = 3\times191$, $735 = 3\times5\times7\times7$,

$753 = 3\times251$. Donc seuls 375 et 735 ont des géniteurs, 3555 par exemple pour 375 et 3577 pour 735.

d. Un nombre contenant un 3, un 5, un 7 et deux mille dix huit chiffres 1 est un géniteur de 105 à 2021 chiffres.

3. a. $f(\mathrm{N}) = x_1 \times x_2 \times ..... \times x_n < x_1 \times 10 \times ... \times 10$ donc $f(\mathrm{N}) < x_1 \times 10^{n-1}$. D'autre part $\mathrm{N} = x_1 \times 10^{n-1} + x_2 \times 10^{n-2} + ... + x_n \geq x_1 \times 10^{n-1}$. Donc $f(\mathrm{N}) < \mathrm{N}$.

b. La suite (*u*) est donc strictement décroissante et par conséquent doit s'arrêter obligatoirement sur un nombre à un chiffre.

4. a. Si le nombre N comporte un chiffre pair alors le produit de ses chiffres est pair et se termine par un chiffre pair. Son fils sera donc lui aussi pair et ainsi de suite jusqu'au numéro de la boîte qui est donc pair. Par conséquent pour atterrir dans une boîte de numéro impair il est nécessaire que chacun des chiffres de N soit impair.

b. 3, 5 et 7 sont les seuls nombres impairs inférieurs à 10.

5. a. 11, 111 et 1111 tombent directement dans la boîte *n*°1.

b. Or ces nombres ne figurant pas dans la liste précédente n'ont pas de géniteur qui atterrirait eux aussi dans la boîte *n*°1. Donc les nombres trouvés au a. sont les seuls qui atterrissent dans la boîte *n*°1.

c. <u>Boîte *n*°3</u> : Pour les nombres à *n* chiffres il y a *n* possibilités, les anagrammes de 11….13. Or ces nombres n'ont pas eux non plus de géniteurs atterrissant dans la même boîte. Dans E il y a donc 2+3+4 =9 entiers atterrissant dans boîte *n*°3.

<u>Boîte *n*°7</u> : idem que pour 3

<u>Boîte *n*°9</u> : deux sortes de nombres : ceux qui contiennent un 9 et des 1, ceux qui contiennent deux 3 et des 1. Ceux sont les seuls car la liste L ne contient pas ces nombres. Il y en a *n* pour les premiers et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ pour les seconds, soit $\dfrac{n(n+1)}{2}$. En tout 3+6+10=19 entiers de E atterrissent dans la boîte *n*°9.

d. Si N contient un 5 dans son écriture f (N) est un multiple de 5, donc se termine par un 0 ou un 5. S'il se termine par un 0, le suivant atterrit dans la boîte n°0. S'il se termine par un 5, on est ramené au cas précédent. Donc un nombre qui contient un 5 dans son écriture atterrit dans la boîte n°0 ou dans la boîte n°5.

e. 15, 35, 75, 135, 175, 315, 1575, 1715, 3375, atterrissent dans la boîte n°5.

Il y a 6 nombres à 2 chiffres qui atterrissent dans la boîte n°5 : 15, 51, 35, 53, 57 et 75.

Pour les nombres à 3 chiffres, il y a les nombres obtenus en rajoutant un 1 et leurs anagrammes, ainsi que les géniteurs de ces nombres à 3 chiffres et leurs anagrammes.

A partir de 15 : 115, 151,511

A partir de 35 : 135, 153, 315, 351, 513, 531

A partir de 75 : 175 et ses 5 anagrammes, plus ses géniteurs à 3 chiffres 355, 535, 553

A partir de 135 : 359 et ses 5 anagrammes

A partir de 175 : 755 et ses 2 anagrammes

A partir de 315 : 579 et ses 5 anagrammes. En tout 33 entiers à 3 chiffres atterrissent dans la boîte n°5.

Pour les nombres à 4 chiffres :

A partir de 15 : 4 comme 1115

A partir de 35 : 12 comme 1135

A partir de 75 : 12 comme 1175 et 12 comme 1355

A partir de 135 : 24 comme 1359 et 4 comme 3533

A partir de 175 : 12 comme 1755

A partir de 315 : 24 comme 1579 et 12 comme 3357

A partir 1575 : 12 comme 5579

A partir de 1715 : 4 comme 5777. En tout 132 entiers à 4 chiffres atterrissent dans la boîte n°5.

Donc en tout 171.