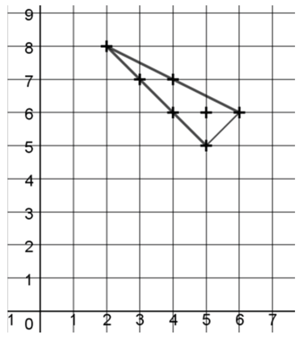
Triangles à côtés entiers (Toutes séries)
Éléments de solution

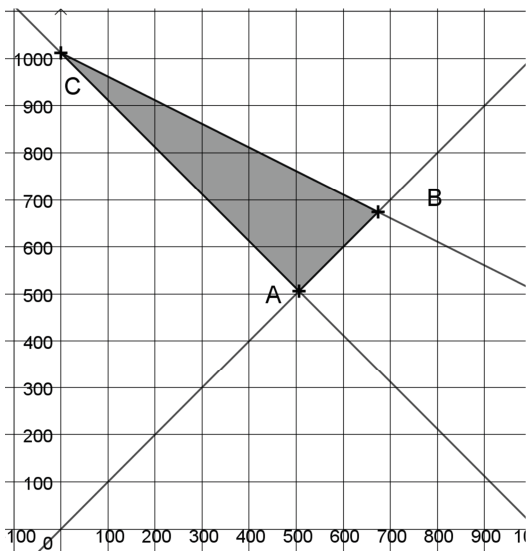
1. *a.* (4, 4, 5) est le seul qui réponde à la définition.
On trace un segment [BC] de longueur 5. Le cercle de centre B de rayon 4 coupe la médiatrice de [BC] en deux points. A est l'un d'eux.
b. En appliquant la définition $19 \leq z \leq 33$.
c. C'est l'inégalité stricte qui manque : $z < x + y$. Une fois z déclaré le plus grand, le fait que la longueur de chaque côté soit inférieure à la différence des longueurs des deux autres est acquis.



2. *a.* Comme $z < x + y$, $x + y + z > 2z$. Il s'ensuit que $z \leq 8$. La plus petite valeur de z est celle pour laquelle les trois côtés sont de même longueur, 6.
b. Pour énumérer les éléments de E_{18} , on tient compte du fait que les deux plus petits côtés ont des longueurs x et y telles que $x + y > 9$. On obtient :
$E_{18} = \{(2,8,8), (3,7,8), (4,6,8), (4,7,7), (5,5,8), (5,6,7), (6,6,6)\}$. Le triangle est représenté ci-dessus.

3. *a.* L'inégalité est transportée lorsqu'on ajoute 1 au plus petit membre et 2 au plus grand, la somme est la bonne.
b. Pour que le triplet $(x - 1, y - 1, y - 1)$ appartienne à E_{p-3}, il faut que $z - 1 < x - 1 + y - 1$, c'est-à-dire $z < x + y - 1$. Comme on a affaire à des entiers vérifiant $z < x + y$, il suffit que $z \neq x + y - 1$ et que d'autre part $x \neq 1$ pour que le nouveau triangle en soit un.
c. Si p est impair, l'égalité $x - 1 + y - 1 = z - 1$ est impossible, attendu que $x - 1 + y - 1 + z - 1$ doit être pair. Il n'y a pas de triplet $(1, y, \ z)$ dans E_{p+3}, car $1 + y + z = p + 3$ et $z < y + 1$ conduisent à $p + 3 < 2y + 1$, ou $p + 2 < 2y$, ce qui fait de y la plus grande longueur à égalité avec z, mais $y + z$ est impair, puisque $p + 3$ est pair. Les deux ensembles ont le même nombre d'éléments.

4. Étude de $E_{2\,019}$.
a. Oui, car $2\,019 = 3 \times 673$.
b. Deux sortes de triangles isocèles sont a priori possibles : ceux dont les côtés égaux ont la plus petite longueur et ceux dont les côtés égaux ont la plus grande. Les triplets (x, x, z) tels que $2x + z = 2\,019$ et $z > x$ vérifient $3x < 2019 < 4x$, car $z < 2x$. On a donc $x \in \{504, 505, \ldots, 671, 672\}$.
Les triplets (x, z, z) tels que $x + 2z = 2\,019$ vérifient $674 < z < 1\,009$ et donc $z \in \{675, 676, \ldots, 1\,007, 1\,008\}$.
Il y a en tout $168 + 336 = 504$ triangles isocèles non équilatéraux dans E_{2019}.
c. Le triplet (x, y, z) correspond à un triangle rectangle de périmètre 2 019 si $z^2 = x^2 + y^2$ et $x + y + z = 2\,019$.
On a donc : $2\,019^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(x + y)z + 2xy = x^2 + y^2 + z^2 + 2\big(2\,019 - x - y\big)(x + y) + 2xy$
$= 4\,038(x + y) - 2xy$.
Mais ce dernier nombre est pair. Donc le problème n'a pas de solution.



5. *a.* Ces conditions sont celles données dans la définition.
b. La somme des trois longueurs vaut bien 2 022, les deux conditions imposent $2\,022 - x - y \geq y$, donc $2\,022 - x - y > 0$, et $2\,022 \geq y + 1\,012$ qui donne l'ordre.

c. Le triangle – appelé ici ABC par commodité - est reproduit sur la figure de droite. L'angle droit est à l'intersection des droites de pentes 1 et −1. Les points à coordonnées entières de la droite d'équation $y = x$ sont les points d'abscisse entière comprise entre l'abscisse de A (506) et celle de B (674). Les points à coordonnées entières sur le côté [AC] d'équation $y = 1\,012 - x$ sont aussi ceux dont l'abscisse est entière supérieure ou égale à 2 et inférieure ou égale à 506. Les points à coordonnées entières sur le côté [BC] sont aussi ceux dont l'abscisse est paire (l'équation de la droite est $y = 1\,022 - \frac{x}{2}$) et comprise entre 2 et 674.
Au total, cela en fait 1 011, mais les sommets du triangle ont été comptés chacun deux fois. L'effectif cherché est donc 1 008. L'aire du triangle rectangle est $84\,672$ (demi-produit des longueurs des cathètes).
d. On utilise la formule pour trouver le nombre de points intérieurs à partir de l'aire et du nombre de points sur le périmètre (attention à ne pas compter A, B et C deux fois). On trouve le nombre de triplets dans $E_{2\,022}$, qui est le même d'après la question **3.** que dans $E_{2\,019}$: $84\,169$.

6. Une solution algorithmique
Le programme doit permettre de faire la liste des triplets d'entiers (x, y, z) pour lesquels $x + y + z = p$, $x + y > p$, et $x \leq y \leq z$. On commencera par déterminer les valeurs extrêmes de z, ce qui nécessite d'étudier la parité et la divisibilité par 3 de p. On distinguera 6 cas :

Il existe un entier q tel que :	Valeur maximale de z	Valeur minimale de z
$p = 6q$	$3q - 1$	$2q$
$p = 6q - 1$	$3q - 1$	$2q - 1$
$p = 6q - 2$	$3q - 2$	$2q - 1$
$p = 6q - 3$	$3q - 2$	$2q - 1$
$p = 6q - 4$	$3q - 3$	$2q - 2$
$p = 6q - 5$	$3q - 3$	$2q - 2$

Une fois déterminés ce minimum et ce maximum, on programme une boucle de z_{min} à z_{max}. Dans cette boucle, à chaque valeur de z sont associées successivement les valeurs de x allant de 1 à $\left[\frac{z}{2}\right]$ (*partie entière*). À chacune des valeurs de x correspond une seule valeur de y telle que $x \leq y \leq z$ et $z < x + y$.

Autre déroulé : on peut aussi utiliser une boucle **For** sur la plus petite des longueurs, x, et à chaque tour de boucle boucler sur y.

Premières fois (Série S)

Éléments de solution

1. En écrivant $p^2 = p \times p$ et en appliquant la définition : $\Delta(p^2) = p \times \Delta(p) + \Delta(p) \times p = 2p$.

On poursuit : $\Delta(p^3) = \Delta(p \times p^2) = 1 \times p^2 + p \times 2p = 3p^2$.

Supposons que pour un entier naturel n, sur lequel on ne fait aucune autre hypothèse, on ait : $\Delta(p^n) = n \times p^{n-1}$.

En appliquant la définition, on obtient : $\Delta(p^{n+1}) = p \times \Delta(p^n) + 1 \times p^n$, ce qui donne, en utilisant notre hypothèse $\Delta(p^{n+1}) = n \times p^n + p^n = (n + 1)p^n$.

Finalement pour tout entier premier p et tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.

2. *a.* $\Delta(p^m \times q^n) = \Delta(p^m) \times q^n + p^m \times \Delta(q^n) = mp^{m-1} \times q^n + p^m \times nq^{n-1} = (mq + np)p^{m-1}q^{n-1}$

b. On applique le résultat précédent à $10^n = 2^n \times 5^n$. On obtient $\Delta(2^n \times 5^n) = (5n + 2n)10^{n-1}$.

Le second membre de l'égalité est bien multiple de 7.

3. Le nombre n peut être écrit $n = {p_1}^{\alpha_1} \times n_1$, les nombres premiers apparaissant dans la décomposition de n_1 étant les mêmes et avec les mêmes exposants que dans la décomposition de n, sauf évidemment p_1. Avec cette écriture, $\Delta(n) = \alpha_1 {p_1}^{\alpha_1 - 1} \times n_1 + {p_1}^{\alpha_1} \times \Delta(n_1) = \alpha_1 \times q_1 + {p_1}^{\alpha_1} \times \Delta(n_1)$.

La prochaine étape fera apparaître le produit ${p_1}^{\alpha_1} \times \alpha_2 \times {p_2}^{\alpha_2 - 1} \times n_2$, où n_2 fait apparaître les nombres premiers apparaissant dans la décomposition de n, avec les mêmes exposants, sauf p_1 et p_2, etc. D'où le résultat :

$\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \cdots + \alpha_k \times q_k$.

4. Pour un nombre premier p, le calcul est rapide, $\alpha_1 = 1$ et $q_1 = 1$ donc $\Delta(p) = 1$.

Pour le produit de deux nombres entiers a et b, on peut, dans la décomposition en produit de facteurs premiers de ab, « étiqueter » les nombres premiers qui figureraient à la fois dans les décompositions de a et de b en les traitant comme des premiers distincts. On adapte la formule ci-dessus donnant $\Delta(n)$, en convenant par exemple pour calculer $\Delta(a)$ de remplacer α_i par 0 si l'entier premier p_i apparaît dans la décomposition de b mais pas dans celle de a. On aurait, en adaptant les notations : $\Delta(a) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \cdots + \alpha_k \times q_k$, $\Delta(b) = \beta_1 \times r_1 + \beta_2 \times r_2 + \beta_3 \times r_3 + \cdots + \beta_k \times r_k$. La somme $a \times \Delta(b) + \Delta(a) \times b$ fait alors apparaître des termes comme $\alpha_1 \times q_1 \times b + \beta_1 \times r_1 \times a$, mais $b \times q_1 = a \times r_1$(c'est aussi le quotient de ab par p_1), et donc ce terme est exactement $(\alpha_1 + \beta_1)s_1$, où $s_1$est le quotient de ab par p_1 et $\alpha_1 + \beta_1$l'exposant de p_1 dans la décomposition de ab.

Conclusion : les *propriétés* imposées permettent de *définir* une application $\Delta\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui les possède. Tout repose évidemment sur l'existence de la décomposition en produit de facteurs premiers, que nous avons admise pour ce problème.

Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ.

5. *a.* $\Delta(12) = 2 \times 2 \times 3 + 2^2 \times 1 = 16$, $\Delta(56) = 3 \times 2^2 \times 7 + 8 \times 1 = 92$,

$\Delta(1\,001) = 11 \times 13 + 7 \times 13 + 7 \times 11 = 311$.

b. Aucun x entier composé non nul ne peut satisfaire $\Delta(x) = 0$, car , $\Delta(x)$ est dans ce cas une somme d'entiers positifs. Les seules solutions sont 0 et 1.

c. Les nombres premiers sont par définition solutions de $\Delta(x) = 1$. Dans la formule donnant en général $\Delta(n)$, pour que cette somme de termes positifs soit égale à 1, il faudrait que tous les termes fussent nuls sauf un, égal à 1. Ce n'est pas possible, le produit de deux entiers ne peut être égal à 1 que s'ils le sont l'un et l'autre.

d. Le nombre 2 n'a pas d'antécédent par Δ. La raison est la même que ci-dessus : il faudrait deux termes égaux à 1 dans la somme permettant le calcul de $\Delta(n)$, ou un terme égal à 2. Mais s'il y a un terme égal à 2, il y en a nécessairement un autre, car $\Delta(2^2) = 2 \times 2$ (l'un vient de l'exposant).

e. On a donné des exemples de la situation contraire à la question **5. *a.***

6. *a.* Si p et q sont des nombres premiers, on trouve $\Delta(p \times q) = p \times \Delta(q) + q \times \Delta(p) = p + q$

b. On a trouvé $\Delta(12) = 16$, tandis que $\Delta(4) + \Delta(3) = 4 + 1 = 5$. La réponse est non.

7. *a.* On a trouvé $\Delta(56) = 92$, tandis que $\Delta(49) = 14$ et $\Delta(7) = 1$.

b. Dans l'hypothèse envisagée, on obtient : $\Delta(ka + kb) = \Delta\big(k \times (a + b)\big) = (a + b) \times \Delta(k) + k \times \Delta(a + b)$.

Ou encore : $\Delta(ka + kb) = a \times \Delta(k) + b\Delta(k) + k\Delta(a) + k\Delta(b)$, d'où le résultat, en réorganisant.

Les points fixes de la fonction Δ

8. *a.* Il existe un entier k tel que $m = k \times p^p$. On a : $\Delta(m) = \Delta(k) \times p^p + p \times p^{p-1} \times k = p^p \times (\Delta(k) + k)$

b. $\Delta(n)$ s'écrit comme combinaison linéaire des quotients de n par les chacun des nombres premiers apparaissant dans sa décomposition. Ces quotients sont des produits des nombres premiers apparaissant dans la décomposition de n, pour chaque terme de la combinaison linéaire, un des exposants a été diminué de 1. Mais un des facteurs premiers peut être « rétabli » par le coefficient qui l'affecte dans la combinaison linéaire, c'est-à-dire par son exposant originel, c'est le cas des nombres qui interviennent avec un exposant qui leur est égal…

9. D'après ce qui précède, l'exposant originel ne peut être rétabli que dans le cas où $n = p^p$.

AGADADAGA (Séries autres que S)
Éléments de solution

1. Les mots inchangés sont ceux qui ne contiennent pas la lettre A.

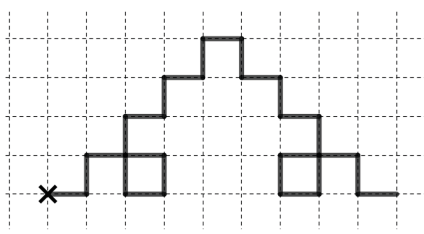
Traitement de texte
2. Après avoir cliqué deux fois sur EXÉCUTER, on obtient (avant suppression des espaces qui facilitent la lecture) :

AGADADAGA G AGADADAGA D AGADADAGA D AGADADAGA G AGADADAGA

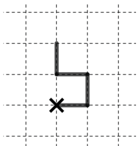
3. Le nombre de A est multiplié par 5 à chaque clic et $5^{12} < 10^9 < 5^{13}$, il faut donc au minimum 5 clics.

4. Après chaque clic, le nombre de D est égal à la somme du double du nombre de A qu'il y avait avant ce clic et du nombre de D qu'il y avait à l'étape précédente. Les effectifs sont donc successivement : $0, 2, 2 + 2 \times 5, 2 + 2 \times 5 + (2 + 2 \times 5) \times 2$, etc. Chaque effectif à partir du deuxième apparaît comme la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 5. Après 20 clics, il y a $2 \times \frac{5^{20}-1}{5-1} = \frac{5^{20}-1}{2}$ (ce nombre est bien un entier…supérieur à 47 trillions).

Motif
5. Pour ce motif, le mot obtenu est ADADAGA.
6. Le motif correspondant à AGADADAGAGAGADADAGADAGADADAGADAGADADAGAGAGADADAGA est reproduit ci-contre à droite.

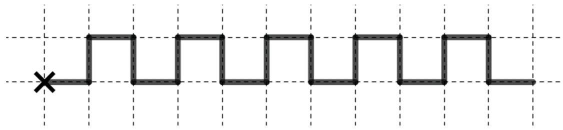


7. Elle a entré le mot ADAGAGAADADAGA



8. *a.* Le motif obtenu (à gauche) est de largeur 1.

b. Le motif obtenu peut avoir une largeur de de 11 carreaux au maximum avec le mot :
AGADADAGAGADADAGAGADADAGAGADADAGAGADADAGA



Toutes les largeurs impaires comprises entre 1 et 11 peuvent être obtenues : pour une largeur 9, il suffit de reprendre le mot précédent et remplacer les six dernières lettres par GADADA ; puis de longueur 7 en remplaçant les 12 dernières lettres par GAGADAGADADA. On obtient de même des mots de largeur 5, 3 ou 1.
On remarque tout d'abord que les traits tracés sont alternativement horizontaux et verticaux quel que soit le mot comprenant 10 D et 10 G : on considère les séquences de 4 lettres en partant de la deuxième lettre du mot, les séquences GADA et DAGA font augmenter la largeur de la partie du motif tracé de 1 carreau, et les séquences GAGA et DADA la font diminuer de 1 carreau. La longueur du mot ne peut donc pas être paire.

Logique et génétique (Toutes séries)

Éléments de solution

1. **a** : $2 \times 2 \times 3 \times 4 \times 4 = 192$.
2. ***a***. . $4^5 = 1024$.

   b. A : rond, chevelu, yeux noirs, bras droit, jambe gauche.
   B : rond, chauve, yeux gris, pas de bras, 2 jambes.

   c. Il suffit de mettre (1,0) ou (1,1) dans la première ligne.

   d. La probabilité d'avoir un jumeau de A est $p_1 = 3/1024$.

   La probabilité d'avoir un jumeau de B est $p_2 = 18/1024 = 9/512$.
3. ***a***. Non à cause des membres

   b.

0	1
0	0
1	0
0	1
0	1
X	

0	1
1	0
1	1
0	1
1	0
Y	

0	0
0	0
0	1
0	0
1	1
Z	

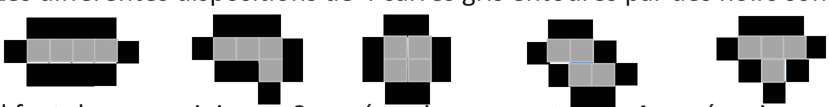
c. 16 possibilités au total pour la forme des 2 personnages ; 9 d'entre elles correspondent à 2 personnages ronds. Parmi ces 9, quatre ont la probabilité ¼ de donner un carré, les autres ne peuvent pas donner de carré. Donc $p = 4/9 \times 1/4 = 1/9$.

Les noirs entourent les gris (Série S)

Éléments de solution

1. ***a***. $a_4 = 1$ (fig 1) et $a_5 = 1$. Pour 2 carrés gris, il faut au moins 6 carrés noirs (fig 2).
   $a_6 = 2$ (fig 2). Pour 3 carrés gris, il faut au moins 7 carrés noirs (fig 4).

   b. Les différentes dispositions de 4 carrés gris entourés par des noirs sont :



   Il faut donc au minimum 8 carrés noirs pour entourer 4 carrés gris.
   On a donc $a_7 < 4$. Or $a_7 \geq 3$ d'après fig 4, donc $a_7 = 3$.
2. ***a***.

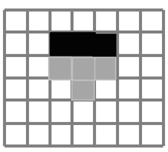
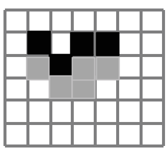
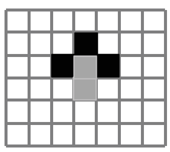
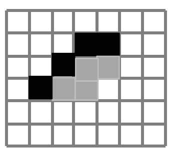
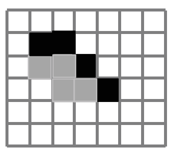
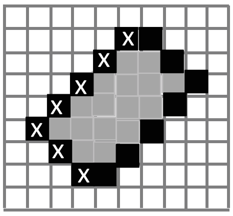






Fig 5 Fig 6 Fig 7 Fig 8 Fig 9

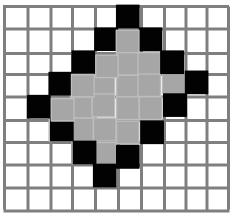
   Dans chacun des cas, en déplaçant un carré noir, on peut augmenter la taille de B

   b. Si C contient deux fois le motif de la figure 10 alors il y a au moins un motif de l'une des figures 5, 6 ou 7. On peut donc augmenter la taille de B.

c. Si on déplace les carrés noirs marqués d'une croix blanche d'une unité vers le haut, on augmente le nombre de carrés gris de 2.



donne



Il n'en est pas toujours ainsi pour une configuration C qui contient deux séries de deux carrés noirs accolés horizontalement. Par exemple sur la figure 2.

3. ***a***. Sur le côté de longueur $a\sqrt{2}$, il y a $a+1$ carrés noirs en comptant les deux sommets, donc a carrés en ne prenant qu'un sommet avec le côté. Donc $n = a+b+a+b = 2a+2b$.
Il y a b rangées de a carrés blancs et $b-1$ rangées de $a-1$ carrés blancs donc
$p = ab + (a-1)(b-1)$.

b. Si on supprime un des deux carrés les plus hauts et que l'on déplace la partie droite d'une unité vers la gauche, on obtient la configuration $C_1(a,b)$.
Ainsi, $n = 2a+2b+1$
et comme on a supprimé $b-1$ carrés gris, on a
$q = p + b - 1 = ab + (a-1)(b-1) + (b-1) = ab + a(b-1)$
donc $q = a(2b-1) = a(n-2-2a)$ car $2b = n-1-2a$.

4. $n = 2019$ est impair. D'après 3. b., $q = -2a^2 + 2017a$.
On cherche l'entier a pour que q soit maximum.
La fonction f définie sur **R** par $f(x) = -2x^2 + 2017x$ est représentée par une parabole dont l'axe de symétrie a pour équation $x = -\frac{2017}{2\times(-2)} = 504{,}25$. Comme -2<0, f est strictement croissante sur $]-\infty; 504{,}25]$ et strictement décroissante sur $[504{,}25; +\infty[$.
Compte tenu de l'axe de symétrie, l'entier a pour lequel $f(a)$ est maximum est 504.
Ce qui donne $a_{2019} = f(504) = 508536$.

Les triplets pythagoriciens

Éléments de solution

A. 1.

Nombre de points sur un côté	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de points total	1	4	9	16	25	36	49
Nombres de points rajoutés		3	5	7	9	11	13

Sur la dernière ligne, on a les entiers impairs.

2. *a*. $(n+1)^2 - n^2 = (n+1-n)(n+1+n) = 2n+1$.

2. *b*. 24 et 25 sont deux entiers consécutifs dont la différence des carrés est 49 car il suffit que $2n+1 = 49$, soit $n = 24$.

(7, 24, 25) est un triplet pythagoricien car $25^2 - 24^2 = 7^2$ donc $25^2 = 24^2 + 7^2$.

2. *c*. Il suffit de trouver deux entiers consécutifs $n + 1$ et n dont la différence des carrés est 35^2 soit 1225 ; ce qui donne $n = 612$.

(35, 612, 613) est un triplet pythagoricien car $613^2 = 612^2 + 35^2$.

3.*a*. Pour qu'un triplet pythagoricien contienne deux entiers consécutifs $n + 1$ et n, il suffit que $2n + 1$ soit le carré d'un entier impair $2k + 1$. Or $2n + 1 = (2k + 1)^2$ équivaut à $n = 2k^2 + 2k$.

Pour tout entier naturel k, $(2k + 1, 2k^2 + 2k, 2k^2 + 2k + 1)$ est un triplet pythagoricien.

3.*b*. Algorithme :

- Demander un entier impair N .
- Calculer $K = (N - 1)/2$
- Afficher le triplet $(N, 2K^2 + 2K, 2K^2 + 2K + 1)$.

B. **1. *a*.** Aire du carré grisé $(y - x)^2$
Aire du grand carré $(x + y)^2$.
Aire de la zone hachurée $4xy$

1.*b*. Si x et y sont des carrés parfaits, il existe deux entiers naturels a et b tels que $x = a^2$ et $y = b^2$, donc $4xy = 4a^2b^2 = (2ab)^2 = c^2$ où $c = 2ab$ est un entier naturel. Ainsi $4xy$ est un carré parfait.

1.*c*. La figure donne $(y - x)^2 + 4xy = (x + y)^2$ soit $(y - x)^2 + \left(2\sqrt{x}\sqrt{y}\right)^2 = (x + y)^2$

Si $x = a^2$ et $y = b^2$ sont deux carrés parfaits strictement positifs tels que $x < y$, alors $a = \sqrt{x}$ et $b = \sqrt{y}$ sont des entiers et $(y - x, 2\sqrt{x}\sqrt{y}, x + y)$ ou $(2\sqrt{x}\sqrt{y}, y - x, x + y)$ est un triplet pythagoricien.

Remarque : compte tenu de la définition donnée pour un triplet pythagoricien, le premier entier doit être strictement inférieur au deuxième. On a $y - x < 2\sqrt{x}\sqrt{y}$ ou $2\sqrt{x}\sqrt{y} < y - x$ mais on ne peut pas voir $y - x = 2\sqrt{x}\sqrt{y}$ sinon on aurait $b^2 - a^2 - 2ab = 0$ donc$(b - a)^2 = 2a^2$ d'où $\frac{b}{a} - 1 = \sqrt{2}$ ce qui est impossible puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2. Chaque couple (x, y) de carrés parfaits tels que $0 < x < y$ donne un triplet pythagoricien.

Par exemple :

$x = 1$ et $y = 4$ donne $y - x = 3$, $2\sqrt{x}\sqrt{y} = 4$, $x + y = 5$ donc (3,4,5) est pyhtagoricien.

$x = 1$ et $y = 9$ donne $y - x = 8$, $2\sqrt{x}\sqrt{y} = 6$, $x + y = 10$ donc (6,8,10) est pyhtagoricien.

$x = 1$ et $y = 16$ donne $y - x = 15$, $2\sqrt{x}\sqrt{y} = 8$, $x + y = 17$ donc (8,15,17) est pyhtagoricien.

$x = 4$ et $y = 9$ donne $y - x = 5$, $2\sqrt{x}\sqrt{y} = 12$, $x + y = 13$ donc (5,12,13) est pyhtagoricien.

…