MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Bordeaux

Épreuve du 15 mars 2017

Éléments de correction

National 1 (toutes séries)
Sommes de carrés en abyme : une rédaction possible

1. ***a.*** On a successivement : $f(1) = 1, f(11) = 2, f(111) = 3$ et, pour tout entier naturel n supérieur à 2 $f(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) = n$
b. $f(23) = f(32) = f(320) = 13$
c. Dans l'écriture de tout antécédent de n par f (on sait qu'il en existe), on peut intercaler des 0, ce qui fournit autant d'antécédents supplémentaires que de 0 intecalés.

2. Ces trois suites sont constantes à partir d'un certain rang, tous les termes étant égaux à 1.

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
301	10	1	1	1	1
23	13	10	1	1	1
1030	10	1	1	1	1

3. Les images successives de 4 sont 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4 ; les mêmes termes se succèdent *ad libitum* dans la suite.

4. ***a.*** L'algorithme affiche 20 puis 4 puis « propriété vérifiée ».
b. Remarquons d'abord que s'il existe un entier naturel N, tel que $u_N = 1$, alors pour tout $n \geq N, u_n = 1$.
De même, s'il existe un entier naturel M tel que $u_M = 4$, alors à partir du rang M, les termes de la suite se répètent, c'est-à-dire qu'elle est périodique de période 8.
Ainsi pour montrer que la propriété est vérifiée, il suffit de montrer qu'il existe un terme de la suite qui vaut 1 ou 4. L'algorithme proposé calcule les termes successifs de la liste tant que ceux-ci sont différents de 1 et de 4 ; il affiche « propriété vérifiée » quand la boucle **tant que** s'arrête donc dès que u prend la valeur 1 ou la valeur 4. À partir de là, soit la suite est constante, soit elle est périodique à partir d'un certain rang.
c. Si la propriété n'est pas vérifiée alors la suite ne prend jamais les valeurs 1 et 4. Ainsi la condition $u \neq 1 \; et \; u \neq 4$ est toujours vérifiée et la boucle est infinie.
d. On exécute l'algorithme avec comme valeur d'entrée pour u successivement tous les entiers de 1 à 99.

5. ***a.*** Soit $x = 100a + 10b + c$ un nombre s'écrivant avec trois chiffres (entiers naturels inférieurs ou égaux à 9, et $a \neq 0$). On a :

$$x - f(x) = 100a + 10b + c - a^2 - b^2 - c^2 = a(100 - a) + b(10 - b) + c(1 - c)$$

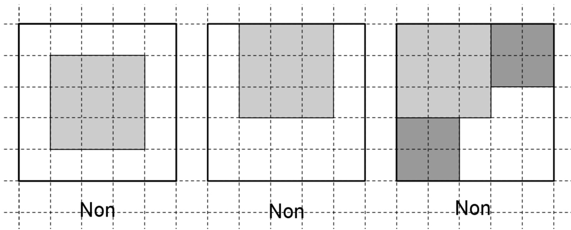
Le terme $a(100 - a)$ est minimum pour $a = 1$ et son minimum est 99.
Le terme $b(10 - b)$ est positif.
Donc $x - f(x) \geq 99 + c(1 - c)$
On en déduit que $x - f(x) > 0$ et donc que $x - f(x) \geq 1$, car ce nombre est entier. Donc $f(x) \leq x - 1$.
b. La suite d'entiers partant de l'entier u_0 s'écrivant avec trois chiffres contient des nombres inférieurs à 99 (on est ramené au problème précédent) et des nombres de trois chiffres formant une suite strictement décroissante… Il est certain qu'au-delà d'un certain rang, tous ses termes sont inférieurs à 99.
La propriété $\mathcal{P}$ est satisfaite par les entiers s'écrivant avec trois chiffres.

On peut aussi raisonner par l'absurde en supposant que pour tout entier J, $u_J > 99$ c'est-à-dire $u_J \geq 100$.
u_0 s'écrit avec 3 chiffres donc $100 \leq u_1 < u_0$ et u_1 s'écrit donc avec 3 chiffres.
u_1 s'écrit avec 3 chiffres donc $100 \leq u_2 < u_1$ et u_2 s'écrit donc avec 3 chiffres.
u_2 s'écrit avec 3 chiffres donc $100 \leq u_3 < u_2$ et u_2 s'écrit donc avec 3 chiffres.
etc jusqu'à u_{1000}.
On a alors $u_0 > u_1 > u_2 > \cdots > u_{1000}$. On trouve ainsi 1000 entiers strictement inférieurs à u_0, ce qui est impossible puisque u_0 s'écrit avec 3 chiffres.
Il existe donc un entier J tel que, $u_J \leq 99$.

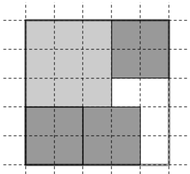
6. ***a.*** Démontrer que $89p < 10^{p-1}$ revient à démontrer que pour tout entier $p \geq 4$, on a $81 < \frac{10^{p-1}}{p}$.
Or la suite (v_p) définie par $v_p = \frac{10^{p-1}}{p}$ est croissante car $v_{p+1} = \frac{10p}{p+1} v_p > v_p$ puisque $v_p > 0$ et $10p > p + 1$.
Ainsi, pour tout entier $p \geq 4$, $v_p \geq v_4 = 250 > 89$. L'inégalité $89p < 10^{p-1}$ est donc vraie pour $p \geq 4$

b. Chacun des p chiffres de u_n est inférieur à 9, la somme de leurs carrés est donc inférieure à $81p$, donc $u_{n+1} < 10^{p-1}$. Ainsi u_{n+1} s'écrit avec au plus $p-1$ chiffres..
c. La diminution du nombre de chiffres pour les nombres en utilisant plus de trois étant acquise, il est certain que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie.
On peut aussi raisonner en supposant que pour tout entier n, le nombre w_n le nombre de chiffres de u_n est supérieur ou égal à 4. On en déduit, d'après **b.**, que la suite (w_n) est strictement décroissante. C'est impossible, car une suite d'entiers naturels ne peut pas être strictement décroissante.
Il existe donc un entier K tel que $w_K < 4$, c'est-à-dire $u_K \leq 999$. La propriété est donc vraie d'après **5.** et **4.*d***.

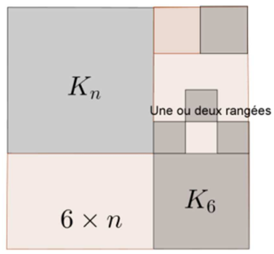
National 2 (série S) 1, 2, 3 … dallez ! Une rédaction possible



1. *a.* Le carré K_6 peut être pavé avec 4 carrés de taille 3 (ou 9 carrés de taille 2) donc sans carré de taille 1.
b. Si on utilise un carré de taille 3, il occupe nécessairement un coin et il n'est pas possible de paver l'espace restant avec des carrés de taille 2. On ne peut pas non plus n'utiliser que des carrés de taille 2 (L'aire à paver est impaire).

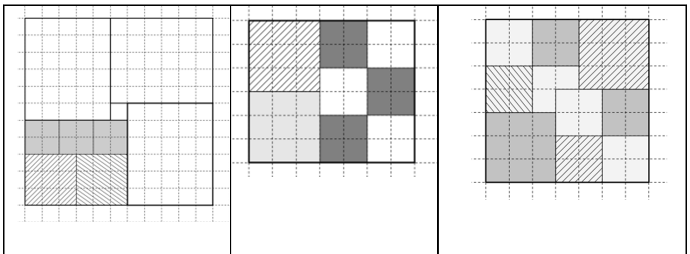


c. La figure de gauche montre un tel pavage.
2. $u(1) = 1, u(8) = 0, u(9) = 0$: il faut au moins un carré de taille 1 pour couvrir K_1 (et un seul suffit…), K_8 et K_9 peuvent être pavés par 16 carrés de taille 2 et par 9 carrés de taille 3.
3. Le carré K_{2p} peut être pavé par p^2 carrés de taille 2 et K_{3p} par p^2 carrés de taille 3. Le minimum du nombre de carrés de taille 1 utilisés dans l'un et l'autre cas est 0.
Ainsi, si n est pair ou un multiple de 3, on a $u(n) = 0$.



4. *a.* Ajoutant un nombre pair à un nombre impair, on obtient un nombre impair ; en ajoutant un multiple de 3 à un non multiple de 3, on obtient un non multiple de 3.
b. Tout rectangle de dimensions n et 6 peut être pavé par des carrés de taille 3 ou 2. En effet, si n est un multiple de 3, deux rangées de pavés taille 3 conviennent, si n est supérieur de 2 à multiple de 3, on complète deux rangées de carrés de taille 3 par trois carrés de taille 2 en largeur, enfin si n est supérieur de 1 à un multiple de 3 (et que n est plus grand que 4), il faudra 6 carrés de taille 2 pour compléter les carrés de taille 3. Le carré K_6 est pavé par des carrés de taille 3.

5. *a.* La figure ci-dessous montre un pavage du rectangle donné et de K_{11}. Cela montre que $u(11) \leq 1$.
b. La figure ci-dessous montre un pavage d'un rectangle de largeur 6 et de longueur 7, puis de K_{13}. Cette figure montre également que $u(13) \leq 1$.



Pavage d'un rectangle 5 × 6 et, par extension, de K_{11}	*Pavage d'un rectangle 6 × 7 (utilisable pour paver K_{13})*	*Pavage de K_7 utilisant 3 carrés de taille 1 (la question n'était pas posée)*

c. Tous les nombres impairs non multiples de 3 strictement supérieurs à 7 s'obtiennent en ajoutant à 11 ou 13 un multiple de 6. D'après la question **4. *b.***, le nombre de carrés de taille 1 nécessaires pour paver des carrés de côté impair non multiple de 3 diminue lorsque le côté augmente. Il reste donc inférieur à 1.

6. *a.* Posons $n = 2p + 1$. Le schéma ci-dessous montre que dans K_{2p+1} chaque ligne de rang pair compte $p + 1$ « 0 » et p « -1 » tandis que chaque ligne de rang impair compte $p + 1$ « 1 » et p « 0 ». La

Ligne 2q	0	-1	0		-1	0
Ligne 2q-1	1	0	1		0	1
	Colonne 1					Colonne 2p+1

somme des coefficients des deux lignes consécutives est donc 1. Il y a p paires de lignes de la sorte plus la première ligne qui est de rang impair (1).
Le total est donc $2p + 1 = n$.

b. La façon dont les coefficients des cases d'un tel carré de taille 3 peuvent se répartir peut être étudiée en observant les quatre positions possibles d'un carré de taille 3 dans un carré de taille 4. Les sommes possibles sont -3, 0 et 3.

	0	1	0	1
	-1	0	-1	0
Ligne 2p +1	0	1	0	1
Ligne 2p	- 1	0	-1	0
	Colonne 2q			

c. La même figure sert à étudier ce qu'il advient d'un carré de taille 2 utilisé dans les mêmes conditions (il suffit cette fois de considérer les quatre positions possibles d'un carré de taille 2 dans un carré de taille 3). Cette fois la somme des coefficients est constante égale à 0.

d. La somme des coefficients d'un carré pavé par des carrés de taille 2 ou 3 est donc un multiple de 3.

e. On conclut que $u(n)$ n'est nul que pour les carrés de taille paire ou multiple de 3 et égal à 1, au-delà de 11, que pour les carrés de taille impaire et non multiple de 3.

f. $2\,017 = 1 + 4 \times 21 \times 24$. Ce qui montre que 2 017 est impair et non multiple de 3, et qui indique comment, à l'image de K_{11} et K_{13} , on peut réaliser un pavage de $K_{2\,017}$ ne contenant qu'un pavé de taille 1. On a $u(2017) = 1$.

National 3 (Non S) Boîtes de canelés bordelais : Rédaction possible

1. On ne peut pas acheter 10 canelés conditionnés, car 9 + 6 > 10 et 6 +6 > 10. On ne peut pas non plus en obtenir 20, car 16 + 6 > 20, 12 + 9 > 20, 12 + 2 × 6 > 20, 4 × 6 > 20. En revanche, 12 + 2 × 9 = 30.

2. ***a.*** Liste des quantités qu'on ne peut pas conditionner dans ces boîtes :

1	2	3	4	5	7	8	10	11	13	14	17	19	20	23	26	29

b. En ajoutant 6 à chacun des nombres de cette liste, on obtient les six nombres suivants, et ainsi de suite, tous les entiers supérieurs.

c. On vérifie que les nombres 36, 37, 38, 39, 40 et 41 sont « atteignables », donc tous leurs successeurs aussi, mais que 35 ne l'est pas.

3. ***a.*** Les nombres proposés sont tous des multiples de 3. Toute somme réalisée avec ces nombres l'est aussi, ce qui n'est pas le cas de 50.

b. Seuls les multiples de 3 sont susceptibles d'être atteints.

4. ***a.*** On utilise trois boîtes de 16 et une boîte de 12.

b. On remplit 4 boîtes de 16, il reste 11, puis une boîte de 9 et il reste 2 qu'on ne sait placer.

c. Si on n'applique pas la méthode gloutonne, on prend 5 boîtes de 12, une boîte de 9 et une boîte de 6.

5. ***a.*** On utilise 3 boîtes de 12 et 5 boîtes de 1.

b. Avec 5 boîtes de 8 et une boîte de 1 on parvient aussi à 41. Donc 6 boîtes au lieu de 8.

6. On peut réaliser tout total de 1 à 31 (penser au système binaire).

Académique 1 (toutes séries) Une curieuse calculatrice ! Une rédaction possible

1. Après 1586, on obtient 182, 26, 26.

2. Après 2354, on obtient 251, 29, 38, 35, 23.

3. ***a.*** Si N est un multiple de 13, $N = 13k$ avec k entier alors $10D + U = 13k$, donc $U = 13k - 10D$.
On a alors $N' = D + 4U = 4 \times 13k - 39D = 13(4k - 3D) = 13k'$ avec k'entier donc N' est un multiple de 13.
b. Si $N' = 13k'$ avec k'entier alors $D + 4U = 13k'$, donc $D = 13k' - 4U$.
On a alors $N = 10D + U = 130k' - 39U = 13(10k' - 3U) = 13k$ avec k entier donc N est un multiple de 13.
c. 26 est un multiple de 13, donc 182 aussi et 15743 également
.

4. ***a.*** $N - N' = 3(3D - U)$). Si $N \geq 40$, on a $D \geq 4$, donc $3D \geq 12 > U$, d'où $N > N'$.
b. Si $N < 40$, on a $D \leq 3$, donc $N' = 4U + D \leq 36 + 3 \leq 39$ d'où $N' < 40$.

5. ***a.*** $N = N'$ si et seulement si $3D = U$ si et seulement si $(D, U) = (0,0)$, $(1,3)$, $(2,6)$ ou $(3,9)$.
Il y a donc 4 solutions pour N : 0, 13, 26, 39.
b. 2354 n'est pas un multiple 13 car par appui sur la touche PROG on obtient 29 qui n'est pas un multiple de 13.
c. Un entier N est divisible par 13 si au bout d'un certain nombre d'appuis sur la touche PROG, on obtient 0 ou 13 ou 26 ou 39.

6. Si on remplace 4 par n, on a $N' = D + nU$ et $N - N' = 9D - (n - 1)U$.
Pour que $N = N'$ il suffit que $9D = (n - 1)U$; il suffit donc que $U = 9$ et $D = n - 1$.
Donc $N = 10D + U = 10n - 1$ est inchangé par appui sur la touche PROG.
Soit d un diviseur de $10n - 1$ et soit q l'entier tel que $10n - 1 = qd$.
Si N est un multiple de d, alors $N = dk$ avec k entier alors $U = dk - 10D$ et
$N' = D + nU = ndk - (10n - 1)D = d(nk - qD) = dk'$ avec k'entier donc N' est un multiple de d.
De même, si $N' = dk'$ avec k'entier alors $D = dk' - nU$.
On a alors $N = 10dk' - (10n - 1)U = d(10k' - qU) = dk$ avec k entier donc N est un multiple de d.
En remplaçant 4 par n, on obtient le caractère de divisibilité par un diviseur quelconque de $10n - 1$.

a. Pour $N' = D + 6U$, on obtient le caractère de divisibilité par $10 \times 6 - 1 = 59$.
b. Caractère de divisibilité par 3 pour $n = 1$, $N' = D + U$. On doit obtenir 0, 3, 6 ou 9.
Caractère de divisibilité par 7 pour $n = 5$, $N' = D + 5U$. On doit obtenir 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42 ou 49.
Caractère de divisibilité par 11 pour $n = 9$, $N' = D + 9U$. On doit obtenir 0, 11, 22, 33, ...88 ou 99.
Caractère de divisibilité par 19 pour $n = 2$, $N' = D + 2U$. On doit obtenir 0 ou 19.
Caractère de divisibilité par 23 pour $n = 7$, $N' = D + 7U$. On doit obtenir 0, 23, 46 ou 69.
Caractère de divisibilité par 29 pour $n = 3$, $N' = D + 3U$. On doit obtenir 0 ou 49.

Académique 2 (Série S) Tartarin et les canards migrateurs - Une rédaction possible

1. ***a.*** $f(3x + 4y, 2x + 3y) = (3x + 4y)^2 - 2(2x + 3y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 2(4x^2 + 12xy + 9y^2)$
Donc $f(3x + 4y, 2x + 3y) = x^2 - 2y^2 = f(x, y)$.
b. De même, $f(x, y)f(u, v) = f(xu + 2yv, xv + yu)$.

2. ***a.*** $f(45,2) = 2025 - 2 \times 4 = 2017$.
Pour $x = 45$ et $y = 2$, $(3x + 4y, 2x + 3y) = (143, 96)$ est solution de l'équation $f(x, y) = 2017$.
Pour $x = 143$ et $y = 96$, $(3x + 4y, 2x + 3y) = (813, 574)$ est une autre solution.
b. En utilisant **1*b*.** et $f(2,1) = 2$, avec $u = 2$, $v = 1$, $x = 45$ et $y = 2$, $(xu + 2yv, xv + yu) = (98, 49)$ est solution de l'équation $f(x, y) = 2 \times 2017$.

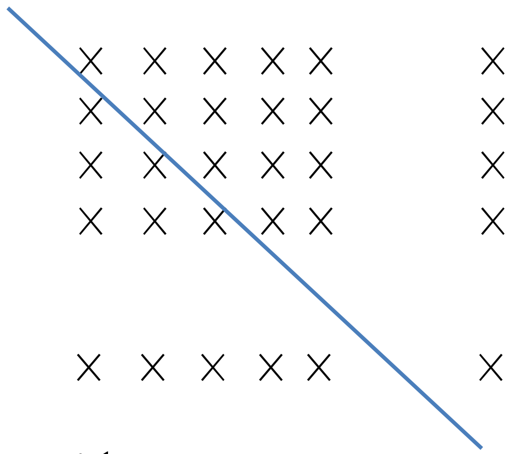
De même, $f(1,1) = -1$ donc $(49, 47)$ est solution de l'équation $f(x, y) = -2017$.

3. *a.* Si $a^2 - 2b^2 = 3$, comme $2b^2$ est pair, alors a^2 est impair donc a est impair.
b. $(2a' + 1)^2 - 2b^2 = 3$ donc $b^2 = 2a'(a' + 1) - 1$ est impair, donc b est impair.
c. $(2b' + 1)^2 = 2a'(a' + 1) - 1$ donc $2b'(b' + 1) \quad - a'(a' + 1) = -1$.
Or $2b'(b' + 1)$ est pair et $a'(a' + 1)$ est pair (produit de deux entiers dont l'un est pair), donc le premier membre est pair alors que le second est impair. Il est donc impossible qu'il y ait une solution à l'équation (E).

4. *a.* On a $T_a = 2T_b$ qui équivaut successivement à $a(a + 1) = 2b(b + 1)$.
Or $f(2a + 1, 2b + 1) = -1$ équivaut à $(2a + 1)^2 - 2(2b + 1)^2 = -1$ soit $4a^2 + 4a = 2(4b^2 + 4b)$.
On a donc $f(2a + 1, 2b + 1) = -1$.
b. Comme il y a entre 100 et 1000 canards, on a $200 \leq a(a + 1) \leq 2000$
donc $14 \leq a \leq 44$ d'où $29 \leq 2a + 1 \leq 89$. De même, a $100 \leq b(b + 1) \leq 1000$, donc $21 \leq 2b + 1 \leq 63$.
$f(1,1) = -1$, donc , d'après la question 1., $f(7,5) = -1$, $f(41,29) = -1$.
Le couple (41, 29) convient pour $a = 20$ et $b = 14$. Il est possible que le nombre de canards dans le vol soit 210.

5. *a.* En désignant respectivement par n l'effectif du premier vol et par a et b (avec $a < b$) les effectifs des deux vols après la séparation, on a $T_n = p^2 = T_a + T_b$.
$T_n = p^2$ équivaut successivement à : $n^2 + n = 2p^2$; $4\,n^2 + 4n = 8p^2$; $(2n + 1)^2 - 2(2p)^2 = 1$; soit $f(2n + 1, 2p) = 1$.
Le vol contient entre 1000 et 2000 canards donc $32 \leq p \leq 44$ et $45 \leq n \leq 62$ d'où $64 \leq 2p \leq 88$ et $91 \leq 2n + 1 \leq 123$. On cherche donc un couple (x, y) tel que $91 \leq x \leq 123$, $64 \leq y \leq 88$ et $f(x, y) = 1$.
On a $f(1,0) = 1$, donc $f(3,2) = 1$, $f(17,12) = 1$, $f(99,70) = 1$.
On peut donc prendre $99 = x = 2n + 1$ et $70 = y = 2p$, soit $n = 49$ et $p = 35$.
Il est donc possible que le vol comporte 1225 (=35^2) canards.

On peut remarquer géométriquement que l'on peut assez facilement partager un carré en deux triangles à l'aide d'une droite.

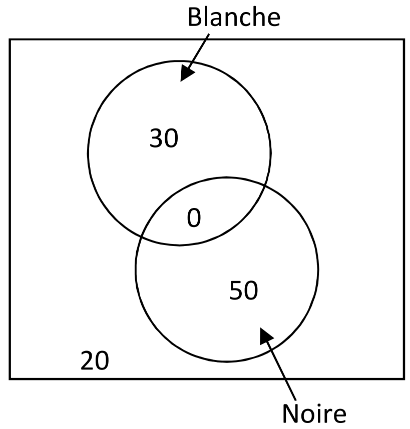


On peut donc prendre $b = a + 1 = p$.
L'un des vols est alors constitué de $T_{34} = 595$ canards et l'autre comporte $T_{35} = 630$ canards.

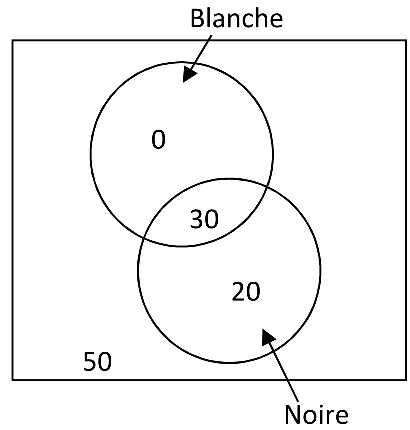
Remarques : Pour les questions 4 et 5, nous donnons des solutions possibles et, *a priori*, rien ne permet d'affirmer qu'il n'y en a pas d'autres. En réalité, on peut obtenir toutes les solutions à l'aide de programmes ou d'un tableur.
Pour la question 4, cela permet de vérifier que la solution donnée est la seule.
Pour la question 5,il y a exactement une autre solution possible avec 190 canards pour l'un des vols et 1035 pour l'autre.

Académique 3(Non S) Des jetons et des gommettes ! - Une rédaction possible

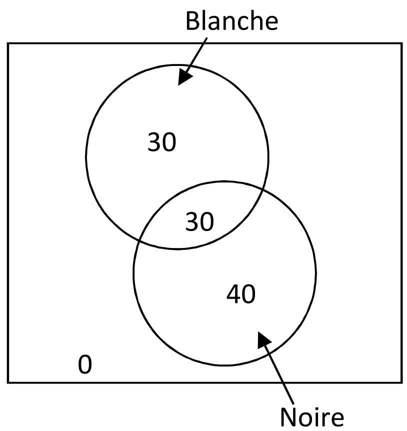
1. *a.* Le minimum est 0



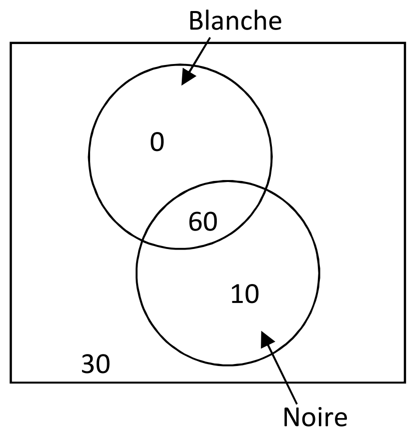
1.b. Le maximum est 30.



2. *a.* Le minimum est 30.



2.*b.* Le maximum est 60.



3. Avec les notations de la figure ci-contre, on a :

$x + y + z + t = 85$, $u = 5$

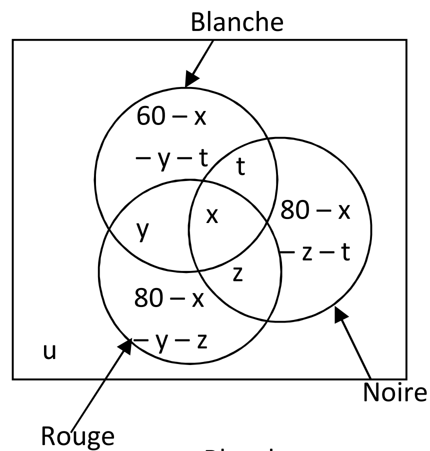
et $u + 60 + (80 - x - t) + (80 - x - y - z) = 100$.

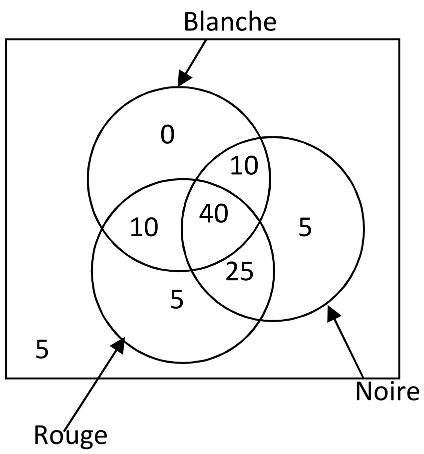
Donc $2x + y + z + t = 120 + u = 125$

D'où $x = 125 - (x + y + z + t) = 125 - 85 = 40$.

Il y a donc 40 jetons tricolores.

Un diagramme possible :





4. On a $2x + y + z + t = 120 + u$, donc $2x + y + z + t \geq 120$

et $x + y + z + t \leq 100$ d'où $x \geq 20$.

Le minimum de jetons tricolores est 20 comme le montre le diagramme ci-contre.