RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Bordeaux

Épreuve du 14 mars 2018

Éléments de correction

National 1 (toutes séries) Géométrie de l'à-peu-près

Mesures d'angles à peu près

1. *a.* Un triangle rectangle en A possède un angle de 90°, donc de mesure appartenant à [75°, 105°]. Il est donc *à peu près rectangle*. Un triangle isocèle de sommet principal A possède deux angles de même mesure, donc dont les mesures diffèrent de moins de 15°. Il est donc *à peu près isocèle*.

b. Si un triangle ne peut avoir deux angles droits, il peut avoir deux angles de mesure appartenant à [75°, 105°] (exemple : 95, 75, 10)
Si tous ses angles sont de plus aigus, les mesures de deux de ses angles sont comprises entre 75° et 90° et donc diffèrent de moins de 15°. Dans ce cas, il est *à peu près isocèle.*

2. Le plus grand des angles d'un triangle acutangle non *à peu près rectangle* mesure strictement moins de 75°, l'angle « moyen » strictement moins de 60° (pour éviter qu'il soit *à peu près isocèle*) et le plus petit strictement moins de 45° (pour la même raison). Cela fait une somme strictement inférieure à 180°. La réponse est donc non.

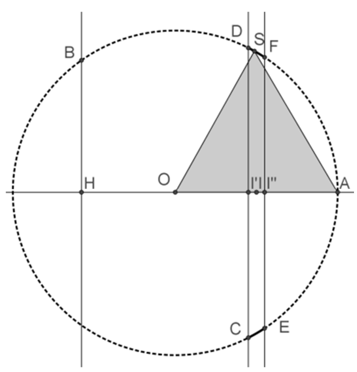
3. Ci-dessous, un programme qui fait ce travail.

Entrer les mesures de A, B et C
Si |A – B| <= 15
  Imprimer « Triangle *à peu près isocèle* en C »
Sinon si |A – C|<=15
  Imprimer « Triangle *à peu près isocèle* en B »
Sinon si |B – C|<=15
  Imprimer « Triangle *à peu près isocèle* en A »
Sinon
  Imprimer « Triangle non *à peu près isocèle* »

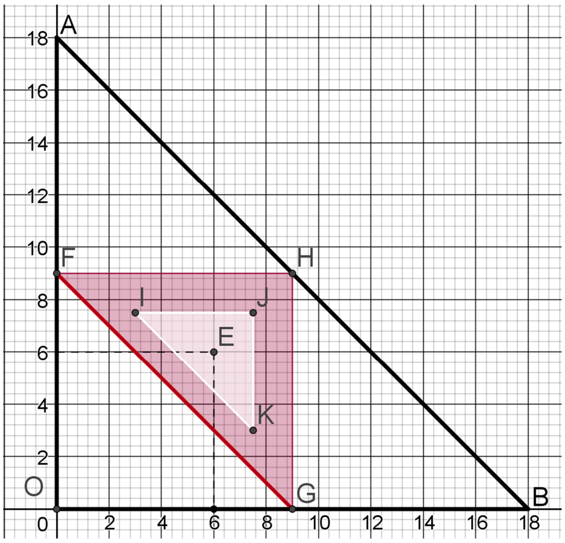
Mesures de longueurs à peu près

4. *a.* Considérons un triangle rectangle d'hypoténuse 1. Les longueurs a et b des côtés de l'angle droit vérifient $a^2 + b^2 = 1$, et le plus petit des deux, mettons a , vérifie $2a^2 \leq 1$. Donc $a < 0{,}8$. Le triangle ne peut donc être *à peu près équilatéral.*
b. Si les mesures des trois côtés d'un triangle sont inférieures à 0,1, il est *à peu près équilatéral…* et il peut être rectangle si l'égalité de Pythagore est vérifiée. C'est le cas par exemple avec des côtés de longueurs 0,05, 0,04 et 0,03.

5. *a.* Les points *à peu près égaux* à I et situés sur la droite (OA) sont les points du segment [I'I''], de milieu I et de longueur 0,2. Les points du cercle correspondant sont situés sur deux arcs déterminés sur le cercle par les droites perpendiculaires à (OA) passant par I' et I''. Ces arcs sont les arcs DF et CE du cercle. L'angle $\widehat{\mathrm{AOF}}$ est déterminé par son cosinus $\frac{1{,}1}{2}$ et l'angle $\widehat{\mathrm{AOD}}$ par son cosinus $\frac{0{,}9}{2}$.
Les mesures de ces angles sont donc, en degrés décimaux, arrondis au dix-millième, 56,633 et 63,2563. Leur différence est 6,6233. Il y a deux arcs qui composent cet ensemble, sa longueur est donc $2 \times \frac{2 \times 6{,}6233 \times \pi}{180} \cong 0{,}46$, valeur arrondie au centième.



b. Les côtés [AO] et [OD] du triangle AOD ont la même longueur, 2. La longueur FI'' est donnée par le théorème de Pythagore : $\mathrm{FI}''^2 = 4 - 1{,}1^2$. Dans le triangle rectangle AFI'', on a donc $\mathrm{AF}^2 = 0{,}9^2 + 4 - 1{,}1^2 = 3{,}6$ et donc $\mathrm{AF} < 1{,}9$.



Le triangle OFA n'est pas *à peu près équilatéral.*
(La figure ci-contre n'est pas exacte, mais l'échelle est respectée)

Une statistique sur la population des triangles

6. *a.* Le domaine $\mathcal{T}$ est l'intérieur du triangle ABO.
b. Le point E a pour coordonnées 6 et 6.
c. Les triangles rectangles sont représentés par les côtés du triangle FHG privé de leurs extrémités.

7. *a.* Les triangles acutangles sont représentés par l'intérieur du triangle FGH.
b. Le triangle FGH a pour aire le quart de l'aire de $\mathcal{T}$. La proportion des triangles acutangles dans l'ensemble des triangles serait un quart (selon ce critère, attention aux paradoxes, on travaille sur l'infini).

8. Pour représenter les triangles *à peu près rectangles*, on prélève dans l'ensemble des triangles acutangles ceux dont tous les angles ont une mesure inférieure à 75°, représentés par l'intérieur du triangle IJK. Les côtés de ce triangle (rectangle isocèle) ont pour longueur la moitié de ceux de FGH. Son aire est donc le quart de celle de FGH. Il reste trois quarts d'un quart, donc trois seizième pour les triangles acutangles *à peu près rectangles* dans l'ensemble des triangles.

National 2 (série S) Ensembles arithmétiques

1. *a.* S_1 est un EA, car chaque fois qu'on considère deux éléments, le troisième complète l'ensemble S_1 et 1 est la moyenne arithmétique de 0 et 2. Pour S_2, 0 et 3 n'ont pas de complément ad hoc, pour S_3 ce sont 1 et 4. Les triplets $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right),\left(\frac{1}{2},2,\frac{7}{2}\right),\left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right)$ sont constitués de deux éléments de S_4 et de leur moyenne arithmétique. Chaque élément de S_4 y figure accompagné des quatre autres.
b. Si un ensemble a deux éléments a et b, il faudrait pour qu'il soit arithmétique que $\frac{a+a}{2} = b$ ou $\frac{a+b}{2} = a$ deux égalités qui conduisent à $a = b$, mais l'ensemble a deux éléments. Les singletons sont, quant à eux, des EA, puisque pour chaque couple d'éléments de S est de la forme (a, a) et que $c = a$ convient.
c. L'ensemble $\left\{0,\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},2\right\}$ convient. En effet, les triplets $\left(0,\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right),(0,1,2),\left(\frac{2}{3},1,\frac{4}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2\right)$ font tous apparaître deux nombre et leur moyenne, et chacun y figure accompagné des quatre autres.

2. *a.* Si a est la moyenne de b et c, alors $a = \frac{b+c}{2}$ et donc $c = 2a - b$. Par symétrie, on doit aussi essayer $d = 2b - a$.
b. Conformément à la question précédente, on doit à chaque étape se demander si (S[i]+S[j])/2 ou 2*S[i]−S[j], ou 2*S[j]−S[i] appartiennent à S. Dès qu'on a prouvé qu'aucun des trois n'appartient à S, on peut conclure. Cela fait au maximum $3n^2$ opérations (la fonction Appartient (r,S) dissimule les comparaisons du résultat de chaque calcul à la liste des éléments de S). Ci-contre, les ajouts à réaliser (sur fond grisé).

```
fonction TesterEA(S=[S[1],..,S[n]] , n)
  Resultat ← Vrai
  Pour i de 1 à n
      Pour j de 1 à n
            Si not (Appartient ((S[i]+S[j])/2,S)
                  or
                   Appartient ((2*S[i]−S[j]),S)
                   or
                   Appartient ((2*S[j]−S[i]),S))
                Resultat← Faux
  Renvoyer(Resultat)
```

c. Avec ce programme, on essaie le couple (j,i) et le couple (i,j). On essaie aussi les couples (i,i). De plus, on ne s'échappe des boucles qu'après avoir tout testé, quand le premier Faux fait tout échouer. D'où les aménagements ci-après.

3. On peut commencer par vérifier que les $\frac{2(a-m)}{M-m}$ sont compris entre 0 et 2. Cela provient du fait que $0 \leq a-m \leq M-m$. On peut ensuite vérifier que 0, 1 et 2 sont éléments de S'. Il suffit pour cela de donner à a les valeurs $m, \frac{M+m}{2}$ et M. $\frac{M+m}{2}$ est en effet un élément de S, car m et Mne peuvent être ni l'un ni l'autre la moyenne de deux éléments de S. Pour vérifier la propriété donnée dans la définition, on prend deux éléments de S' (ce qui revient à prendre les deux éléments de S dont ils sont les images), $\frac{2(a-m)}{M-m}$ et $\frac{2(b-m)}{M-m}$, leur moyenne arithmétique $\frac{2\left(\frac{a+b}{2}-m\right)}{M-m}$, le symétrique de $\frac{2(b-m)}{M-m}$ par rapport à $\frac{2(a-m)}{M-m}$ et le symétrique de $\frac{2(a-m)}{M-m}$ par rapport à $\frac{2(b-m)}{M-m}$, qui sont $\frac{2(2a-b-m)}{M-m}$ et $\frac{2(2b-a-m)}{M-m}$. Comme S est un EA, un des trois nombres $\frac{a+b}{2}$, $2a-b$ et $2b-a$ appartient à S, donc une de leurs trois images à S'.

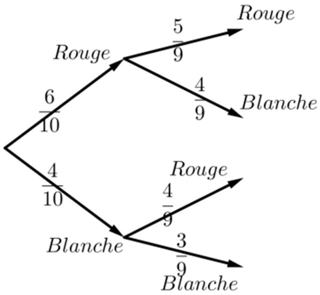
```
fonction TesterViteEA(S=[S[1],..,S[n]] , n)
  Resultat ← Vrai
  Pour i de 1 à n-1
      Pour j de i+1 à n
          Si not (Appartient ((S[i]+S[j])/2,S)
                 or
                  Appartient ((2*S[i]−S[j]),S)
                  or
                  Appartient ((2*S[j]−S[i]),S))
              Resultat← Faux
              Renvoyer (Resultat)
  Renvoyer(Resultat)
```

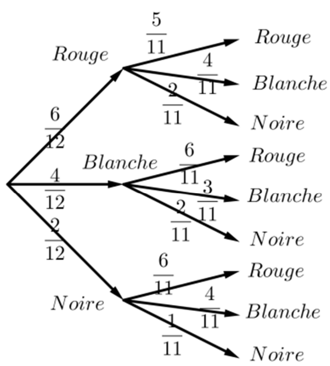
4. Si x est élément de S tel que $0 < x < 1$, alors
$x-(2-x) = 2x-2$ n'appartient pas à S.
$2+(2-x) = 4-x$ n'appartient pas à S.
La seule possibilité pour compléter la paire $\{x, 2\}$ est donc $\frac{x+2}{2}$.
Si $1 < x < 2$, alors $0-x$ n'appartient pas à S et $2x$ non plus. La seule possibilité pour compléter la paire $\{0, x\}$ est $\frac{x}{2}$.
Remarquons que si S contient 0 et 2, il contient aussi 1, seule possibilité pour compléter la paire $\{0,2\}$. L'ensemble S a donc trois éléments au moins et on vient de voir que s'il en possède un quatrième, il en a au moins un cinquième.
Nous n'avons raisonné que sur des ensembles contenus dans [0, 2], mais la question **3.** nous a permis de ramener le problème à de tels ensembles. Il n'y a donc pas d'EA à 4 éléments.

5. ***a.*** On suppose qu'il existe dans S un élément a_1 tel que $0 < a_1 < \frac{2}{3}$. La question **4.** Nous a permis de montrer que $\frac{a_1+2}{2}$ appartient à S. Or, $1 < \frac{a_1+2}{2} < 2$. La question **4.** conduit à $\frac{a_1+2}{4} \in S$, mais ce dernier nombre est strictement inférieur à $\frac{2}{3}$ et strictement supérieur à a_1. Donc, si S contient un élément inférieur à $\frac{2}{3}$, il en contient un plus grand et aussi inférieur à $\frac{2}{3}$. Il en contient ainsi 3, 4, etc. une infinité, mais l'hypothèse précise que S est un ensemble à n éléments. Donc S ne contient aucun nombre inférieur à $\frac{2}{3}$.
b. Si S contient un nombre a strictement compris entre $\frac{2}{3}$ et 1, d'après la question **4.** le nombre $\frac{a+2}{2}$ appartient à S et est supérieur à 1. La question **4.** Intervient encore : $\frac{a+2}{4}$ appartient à S et ce nombre est supérieur à $\frac{2}{3}$ et inférieur à 1. La comparaison entre a et $\frac{a+2}{4}$ donne : $a - \frac{a+2}{4} = \frac{3a-2}{4}$ et comme $a > \frac{2}{3}$ on conclut que $\frac{a+2}{4} < a$. Donc, si l'intervalle $\left]\frac{2}{3}, 1\right[$ contient un élément de S, il en contient un autre plus petit. On termine le raisonnement comme au ***a.***
c. On déduit de ce qui précède que si S contient un élément de]0, 1[, cet élément ne peut être que $\frac{2}{3}$. L'ensemble S contient alors $\frac{4}{3}$ (moyenne entre 2 et $\frac{2}{3}$). S'il contenait un autre élément que $\frac{4}{3}$ entre 1 et 2, alors d'après la question **3.**, il contiendrait sa moitié,

National 3 (autres séries que S) Boules de même couleur

1. ***a.*** et ***b.*** Les deux graphes ci-contre permettent de faire les comptes :
Lorsque l'urne contient 4 boules blanches et 6 rouges,
$P(G) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{7}{15}$





Lorsque l'urne contient 4 boules blanches, 6 rouges et 2 noires, l'événement G (ce n'est pas le même que ci-dessus…) a pour probabilité :

$$P(G)=\frac{6}{12}\times\frac{5}{11}+\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}+\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{3}$$

2. *a.* On peut reprendre le premier graphe en remplaçant 4 par x et 10 par $(6+x)$. On obtient la probabilité de G (c'est encore un autre G) :

$$P(G)=\frac{6}{(6+x)}\times\frac{5}{(5+x)}+\frac{x}{(6+x)}\times\frac{x-1}{(5+x)}$$

b. L'équation $P(G)=\frac{1}{2}$ s'écrit $2x(x-1)+60=(x+6)(x+5)$, ou encore $x^2-13x+30=0$, c'est-à-dire $(x-3)(x-10)=0$ Le jeu est donc équitable si l'urne contient au départ 3 boules blanches ou 10 boules blanches.

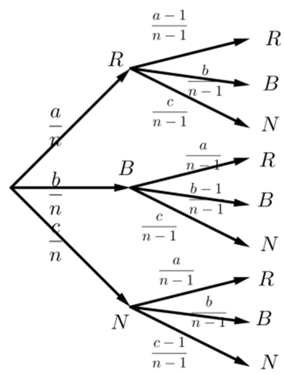
Remarque en passant : *on pourrait s'étonner que dans la réponse à cette question ne figure pas le cas d'égalité entre l'effectif des boules blanches et des boules rouges. Le cas d'égalité, effectif* n *boules de chaque couleur (*$n\geq 2$*, quand même), conduit à* $P(G)=\frac{n-1}{2n-1}$*, quantité légèrement inférieure à* $\frac{1}{2}$*.*

3. *a.* L'urne contient a boules rouges et b boules blanches. La probabilité de l'événement G (encore un autre G) s'écrit :

$$P(G)=\frac{a}{a+b}\times\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\times\frac{b-1}{a+b-1}=\frac{a^2+b^2-a-b}{(a+b)(a+b-1)}.$$

$P(G)=\frac{1}{2}$ lorsque $2a^2+2b^2-2a-2b=a^2+b^2+2ab-a-b$,
ce qui s'écrit encore $a^2+b^2-2ab=a+b$, c'est-à-dire finalement $(a-b)^2=n$.

b. On cherche donc des entiers a, b et p vérifiant : $\begin{cases}a+b=p^2\\ a-b=p\end{cases}$. On obtiendrait donc, sous réserve d'existence, $a=\frac{p^2+p}{2}$ et $b=\frac{p^2-p}{2}$. L'équation $p^2+p-2a=0$ doit posséder des solutions entières supérieures à 2.
Comme ses solutions positives éventuelles s'écrivent $\frac{\sqrt{8a+1}}{2}-\frac{1}{2}$, une condition nécessaire est que $8a+1$ soit le carré d'un entier impair.
En posant $8a+1=(2m+1)^2$, on obtient $p=m$ et $a=\frac{p(p+1)}{2}$. On doit donc chercher a parmi les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, etc.
Et comme $=a-p$, si on pose $8a+1=(2p+1)^2$, il vient
$b=\frac{p(p+1)}{2}-p=\frac{(p-1)p}{2}$.
a et b sont donc deux nombres triangulaires successifs.
Les couples (a,b) sont, le premier, (3, 1) (possible si on admet qu'il peut n'y avoir qu'une seule boule d'une des deux couleurs…), puis (6, 3), (10, 6), (15, 10), (21, 15), (28, 21), etc.



4. *a.* Le graphe est analogue à celui de la question **1.** Dans le cas de trois couleurs. La probabilité $P(G)$ se calcule de la même façon. $P(G)=\frac{a}{n}\times\frac{a-1}{n-1}+\frac{b}{n}\times\frac{b-1}{n-1}+\frac{c}{n}\times\frac{c-1}{n-1}$ (on a posé $a+b+c=n$). $P(G)=\frac{a^2+b^2+c^2-n}{n(n-1)}$
On suppose ici que $n=13$. Une condition nécessaire pour que le jeu soit équitable s'écrit $2(a^2+b^2+c^2)=13^2+13$, soit $a^2+b^2+c^2=91$

Remarque : *cette condition est nécessaire, mais on n'a pas vérifié l'existence* ***d'entiers*** a, b, c *dont la somme soit 13 et la somme des carrés 91.*

De $\begin{cases}a+b+c=13\\ a^2+b^2+c^2=91\end{cases}$ on déduit $a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)=78$.
Les nombres entiers positifs figurant dans cette somme sont à choisir parmi 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72 (0 correspond au cas où une couleur est représentée par une seule boule, cas évoqué plus haut). La seule possibilité est {0, 6, 72}, qui correspond à $(a,b,c)=(1,3,9)$ aux permutations près.

b. Si le triplet (x,y,z) conduit à une situation d'équité, alors $\frac{x^2+y^2+z^2-x-y-z}{(x+y+z)(x+y+z-1)}=\frac{1}{2}$. Cette condition s'écrit :
$2x^2+2y^2+2z^2-2x-2y-2z=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx-x-y-z$ ou encore :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - x - y - z = 0$. Comme $x^2 + y^2 - 2xy = x + y$ (le tirage à deux couleurs d'effectifs x et y est «équitable), on obtient $z^2 - 2zx - 2yz - z = 0$. On écarte le cas $z = 0$ (il y a vraiment trois couleurs) et on obtient $z = 2x + 2y + 1$.

c. On complète les couples fournissant un jeu équitable à deux couleurs par le troisième effectif, les premiers triplets obtenus sont : (3, 1, 11), (6, 3, 19), (10, 6, 33), etc. Attention, cette fois les permutations ne conduisent pas à d'autres solutions, car, par exemple, le couple (33,6) ne fait pas partie de ceux qui donnent une partie équitable à deux couleurs.

5. La formule donnant $P(G)$ pour trois couleurs peut être étendue à m couleurs avec les effectifs 1, 3, 9, … 3^{m-1}.
Pour cela, il faut d'abord calculer l'effectif total : $1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{m-1} = \frac{3^m - 1}{2}$.
Au numérateur du quotient donnant $P(G)$ on trouve :
$N = 3 \times 2 + 9 \times 8 + \cdots + 3^{m-2} \times (3^{m-2} - 1) + 3^{m-1} \times (3^{m-1} - 1)$, qui peut aussi s'écrire :
$N = 3^2 + 3^4 + \cdots + 3^{2m-2} - 3^0 - 3^1 - 3^2 - \cdots - 3^{m-1}$ (on retrouve la somme des carrés moins la somme).

$$N = \frac{1 - 3^{2m}}{1 - 3^2} - \frac{3^m - 1}{2} = \frac{(3^m - 1) \times 3 \times (3^{m-1})}{8}$$

Le produit $\frac{3^m-1}{2} \times \left(\frac{3^m-1}{2} - 1\right)$ s'écrit aussi $\frac{3^m-1}{2} \times 3 \times \frac{3^{m-1}-1}{2}$ et on voit que leur quotient $P(G) = \frac{1}{2}$
Tous les jeux respectant cette distribution sont équitables.

Académique 1 (toutes séries) Coloriage sous contraintes

1. **a.** Pour $n = 1$, le seul coloriage qui convient est : 1 en rouge et 2 en bleu.
   b. Pour $n = 2$, on a les nombres 1, 2, 3, 4. Les deux nombres coloriés en bleu doivent avoir la même parité car leur somme est paire. Les seules possibilités sont donc $\{1,3\}$ ou $\{2,4\}$.
   - Si 1 et 3 sont en bleu, 2 et 4 sont en rouge et la contrainte (2) n'est pas satisfaite.
   - Si 2 et 4 sont en bleu, 1 et 3 sont en rouge et la contrainte (2) n'est pas satisfaite.
   Il n'y a donc pas coloriage possible.
   c. $3S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 8 = 36$ donc $S = 12$.
   En coloriant en rouge 4 nombres dont la somme est égale à 12 (par exemple 1, 2, 3, 6) et en bleu les autres (sur l'exemple, 4, 5, 7, 8), on obtient un coloriage possible.
   d. Pour $n = 5$, on doit avoir $3S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 8 + 9 + 10 = 55$. Ce qui est impossible puisque 55 n'est pas un multiple de 3.
   Pour $n = 6$, on doit avoir $3S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78$ soit $S = 26$.
   En coloriant en rouge 6 nombres dont la somme est égale à 26 (par exemple 1, 2, 3, 4, 5, 11) et en bleu les autres (sur l'exemple, 6, 7, 8, 9, 10, 12), on obtient un coloriage possible.

2. **a.** Le plus petit élément de E est obtenu en faisant la somme des n plus petits entiers compris entre 1 et $2n$, ainsi $a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.
   b. De même, le plus grand élément de E est obtenu en faisant la somme des n plus grands entiers compris entre 1 et $2n$, ainsi $b_n = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + 2n$.
   On a $b_n = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{n\ termes} + 1 + 2 + \cdots + n$, soit $b_n = n^2 + a_n$..

   c. $a_n + qn = \underbrace{q + q + \cdots + q}_{n\ termes} + 1 + 2 + \cdots + n = (q + 1) + (q + 2) + \cdots + (q + n)$ est la somme des n entiers distincts $q + 1, q + 2, \ldots q + n$ qui sont compris entre 1 et $2n$ puisque $0 \leq q < n$.
   Donc $a_n + qn \in E$.
   $a_n + qn + 1 = (q + 1) + (q + 2) + \cdots + (q + n - 1) + (q + 1 + n)$ est la somme des n entiers distincts $q + 1, q + 2, \ldots q + n - 1, q + n + 1$ qui sont compris entre 1 et $2n$ puisque $0 \leq q < n$
   donc $a_n + qn + 1 \in E$

$a_n + qn + 2 = (q+1) + (q+2) + \cdots + (q+n-2) + (q+n) + (q+1+n)$ est la somme des n entiers distincts $q+1, q+2, \ldots q+n-2,\ q+n\ q+n+1$ qui sont compris entre 1 et $2n$ puisque $0 \leq q < n$ donc $a_n + qn + 2 \in E$.
etc.
Si $1 \leq p \leq n$, on obtient $a_n + qn + p$ à partir de $a_n + qn = (q+1) + (q+2) + \cdots + (q+n)$ en augmentant de 1 les p plus grands termes de la somme du second membre. Ils sont alors tous distincts et compris entre 1 et $2n$ puisque $q < n$. Ainsi $a_n + qn + p \in E$.

d. D'après **c.**, E contient tous les entiers compris entre a_n et $a_n + n$ (en prenant $q = 0$), tous les entiers compris entre $a_n + n$ et $a_n + 2n$ (en prenant $q = 1$),), tous les entiers compris entre $a_n + 2n$ et $a_n + 3n$ (en prenant $q = 2$), …, tous les entiers compris entre $a_n + (n-1)n$ et $a_n + n^2 = b_n$ (en prenant $q = n-1$).
Ainsi, E contient tous les entiers compris entre a_n et b_n donc E est l'ensemble de tous les entiers compris entre a_n et b_n.

3. **a.** $3S = 1 + 2 + \cdots + 2n = \frac{1}{2}2n(2n+1)$ donc $S = \frac{1}{3}n(2n+1)$.
b. Si $r = 2$, on a $S = \frac{1}{3}(3k+2)(6k+5) = 6k^2 + 9k + \frac{10}{3}$. Comme 10 n'est pas un multiple de 3, S n'est pas un entier et le coloriage est donc impossible.
c. Si $r = 0$ alors $S = \frac{1}{3}(3k)(6k+1) = 6k^2 + k$ est un entier.
De même, si $r = 1$ alors $S = \frac{1}{3}(3k+1)(6k+3) = 6k^2 + 5k + 1$ est un entier.
Le coloriage est possible si et seulement si S est la somme de n entiers distincts compris entre 1 et $2n$ c'est-à-dire si et seulement si S est compris entre a_n et b_n.
On a $S - a_n = \frac{1}{3}n(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(4n+2-3n-3) = \frac{1}{6}n(n-1)$ donc $S - a_n \geq 0$ car $n \geq 1$ ainsi $S \geq a_n$.
$b_n - S = \frac{1}{2}n(n+1) + n^2 - \frac{1}{3}n(2n+1) = \frac{1}{6}n(3n+3+6n-4n-2) = \frac{1}{6}n(5n+1)$ donc $b_n - S \geq 0$ ainsi $S \leq b_n$.
Comme S est compris entre a_n et b_n, S est la somme de n entiers distincts compris entre 1 et $2n$. En coloriant ces entiers en rouge et les autres en bleu, on obtient un coloriage qui convient.

4. Pour les entiers de 1 à 2018, on a $n = 1009 = 3k + r$ avec $r = 1$. Le coloriage est donc possible.
On obtient $S = \frac{1}{3} \times 1009 \times 2019 = 1009 \times 673$.
En remarquant que la somme des entiers $673 - a$ et $673 + a$ est égale à 2×673, on peut construire facilement une liste de 1009 nombres dont la somme est S : les entiers de $673 - 504 = 169$ à $673 + 504 = 1177$.
Un coloriage possible : tous les entiers compris entre 169 et 1177 sont coloriés en rouge et les autres en bleu.

Académique 2 (série S) Des carrés et des cubes

Partie A

1. **a.** Comme $0 \leq a \leq b$, on a $a^2 \leq b^2$ donc $2a^2 \leq a^2 + b^2 = 2018$ d'où $a \leq \sqrt{1009} \approx 31{,}8$.
a étant entier, on en déduit $a \leq 31$.
b. Si a et b sont pairs, il existe deux entiers a' et b' tels que $a = 2a'$ et $b = 2b'$.
$a^2 + b^2 = 4a'^2 + 4b'^2 = 4(a'^2 + b'^2)$ est un multiple de 4 car $a'^2 + b'^2$ est un entier.
c. Si a et b sont de parités différentes, il en est de même pour a^2 et b^2, donc $a^2 + b^2$ est impair, ce qui est impossible puisque 2018 est pair.
Il est donc impossible que a et b soient de parités différentes, ils ont donc même parité et ne peuvent pas être tous les deux pairs car 2018 n'est pas un multiple de 4. Ils sont donc tous les deux impairs.

d. Les tables de multiplication permettent de dire que les chiffres des unités possibles pour le carré d'un entier impair sont 1, 5, 9.
Si le chiffre des unités de a est 1 ou 9, celui de a^2 est 1 et comme celui de a^2+b^2 est 8, celui de b^2 est 7, ce qui est impossible.
De même, si le chiffre des unités de a est 5, celui de a^2 est 5 et comme celui de a^2+b^2 est 8, celui de b^2 est 3, ce qui est impossible.
Le chiffre des unités de a ne peut donc être ni 1, ni 5, ni 9. C'est donc 3 ou 7.

2. D'après **1.a** et **1.d**, si (a,b) est solution et $a \leq b$ alors a est l'un des nombres 3, 7, 13, 17, 23, 27.
En calculant $b=\sqrt{2018-a^2}$, on obtient un entier si seulement si $a=13$. On a alors $b=43$.
On en déduit que les couples solutions sont (13,43) et (43,13).

Partie B

1. **a.** $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3=a^3+b^3=N.$
$4N-(a+b)^3=4(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^3=(a+b)(4a^2-4ab+4b^2-a^2-2ab-b^2)$
Soit $4N-(a+b)^3=(a+b)(3a^2-6ab+3b^2)=3(a+b)(a-b)^2$
b. Comme a et b sont des entiers, a^2-ab+b^2 et $d=a+b$ sont entiers donc d est un diviseur de N.
$d^3-N=(a+b)^3-a^3-b^3=3a^2b+3ab^2$ donc $d^3-N \geq 0$ d'où $N \leq d^3$.
$4N-d^3=3(a+b)(a-b)^2$ donc $4N-d^3 \geq 0$ d'où $d^3 \leq 4N$.

c. Les diviseurs de 2018 sont 1, 2, 1009, 2018.
Aucun d'entre eux ne vérifie l'encadrement $2018 \leq d^3 \leq 4 \times 2018$, donc il n'existe pas deux entiers naturels non nuls a et b tels que $a^3+b^3=2018$. De plus, 2018 n'est pas le cube d'un entier donc il n'existe pas deux entiers naturels a et b tels que $a^3+b^3=2018$.

2. **a.** $N=31 \times 2018$ est un multiple de 2018.
b. Les diviseurs de N sont 1, 2, 31, 62, 1009, 2018, 31276, 62558.
Le seul qui vérifie l'encadrement $N \leq d^3 \leq 4N$ est 62.
Donc $a+b=62$ et $a^2-ab+b^2=\frac{N}{a+b}=1009$.
c. $b=62-a$ et $a^2-ab+b^2=1009$ donnent $a^2-a(62-a)+(62-a)^2=1009$.
Donc $3a^2-186a+2835=0$ d'où $a^2-62a+945=0$.
La résolution de cette équation donne deux solutions $a=27$ ou $a=35$.
On vérifie sans peine que les couples (27,35) et (35,27) sont solutions. Ce sont donc les seules.

3. Un exemple d'algorithme qui affiche le plus petit multiple de 2018 qui s'écrit comme somme de deux cubes d'entiers naturels non nuls.

Initilisations	
	Affecter la valeur 0 à N
	Affecter la valeur 0 à S
Traitement	Tant que S=0
	Affecter à N la valeur de$N+2018$
	Affecter à M la partie entière de$\sqrt[3]{N/2}$
	Pour A variant de 1 à M
	Affecter à B la valeur $\sqrt[3]{N-A^3}$
	Si B est un entier
	Affecter à S la valeur 1
	FinSi
	FinPour
	FinTantQue
	Afficher P

Académique 3 (autres séries que S) Neuf au pays des carrés

1. $1369 = 37^2$; le nombre suivant est $43^2 = 1849$.

2. **a**. Le chiffre des unités de b ne peut être que 3 ou 7. Dans les autres cas, on n'obtient pas 9 comme chiffre des unités de a^2.
b. Si a est dans la liste E, $a = b^2$ où le chiffre u des unités de b est 3 ou 7. En désignant par d le nombre de dizaines contenues dans b, on a $b = 10d + u$ donc $a = (10d + u)^2$ avec $u \in \{3,7\}$.
c. Le 2018^{e} nombre de la liste est obtenu pour $d = 1008$ et $u = 7$ soit $10087^2 = 101\,747\,569$.

3. La différence de deux termes consécutifs de la liste est :

$$(10d + 7)^2 - (10d + 3)^2 \text{ ou } (10(d + 1) + 3)^2 - (10d + 7)^2$$

$(10d + 7)^2 - (10d + 3)^2 = 4(20d + 10) = 40(2d + 1)$ est un multiple de 40.
$(10(d + 1) + 3)^2 - (10d + 7)^2 = 6(20d + 20) = 120(2d + 1) = 40(6d + 3)$ est un multiple de40.
La différence entre deux termes quelconques de la liste est une somme de multiples de 40, c'est donc également un multiple de 40.

4. **a.** S'il existe un nombre a de la liste E qui se termine par 19, comme 9 est dans la liste E, d'après **3.** le nombre $a - 9$ est un multiple de 40 donc de 4. C'est impossible car il se termine par 10 qui n'est pas un multiple de 4.
Aucun nombre de la liste E ne se termine par 19. On a donc $p_1 = 0$.
b. En regardant les premiers termes de la liste E :
$3^2 = 9, 7^2 = 49,\ 13^2 = 169, 17^2 = 289, 23^2 = 529, 27^2 = 729,\ \ 33^2 = 1089, 37^2 = 1369,$
$43^2 = 1849, 47^2 = 2209, 53^2 = 2809, 57^2 = 3249$ …
On peut remarquer que $(50 + a)^2$ et a^2 ont les mêmes deux derniers chiffres. Cela résulte du fait que leur différence est un multiple de 100.
Parmi les 2018^{e} premiers nombres de la liste E, ceux qui se terminent par 69 sont donc :
- les nombres de la forme $(50k + 13)^2$ avec $0 \leq k \leq 201$
- les nombres de la forme $(50k + 37)^2$ avec $0 \leq k \leq 201$

Il y en donc 202 de chaque sorte soit 404 en tout.
On a $p_2 = \frac{404}{2018} = \frac{202}{1009} \approx 0{,}2002$.
Autre méthode possible
$(10d + 3)^2$ se termine par 69 si et seulement si $(10d + 3)^2 - 69$ est un multiple de 100.
Or $(10d + 3)^2 - 69 = 100d^2 + 60d - 60 = 10(10d^2 + 6d - 6)$ est un multiple de 100 si et seulement si $6d - 6$ est un multiple de 10 c'est-à-dire le chiffre des unités de $6d$ est 6, ce qui signifie que le chiffre des unités de d est 1 ou 6.
Dans les 2008 premiers termes, on a $0 \leq d \leq 1008$, ce qui donne 101 valeurs de d se terminant par 1 et autant se terminant par 6, soit 202 nombres de la forme $(10d + 3)^2$ se terminant par 69.
De la même façon, on trouve 202 nombres de la forme $(10d + 7)^2$ se terminant par 69.
Au final, $p_2 = \frac{404}{2018} = \frac{202}{1009} \approx 0{,}2002$.