LA LIAISON 3e – 2nde EN MATHÉMATIQUES

Collège THÉOPHILE DE VIAU ~ LE PASSAGE, jeudi 12 mai 2011

Intervenant : Jean-Luc RICCI (Formateur académique – Académie de Bordeaux)

I. Avant-propos

Ce document de travail a été réalisé en s'inspirant de plusieurs ouvrages et publications :

- La liaison collège-lycée en Mathématiques par Yves OLIVIER, IA-IPR, Académie d'Orléans-Tours
- Les programmes de Mathématiques, classe de seconde
- Les programmes de Mathématiques au collège
- Les documents ressources collège et lycée
- Vade-mecum pour les mathématiques, Sept. 2009
- Banque de problèmes en mathématiques, Sept. 2009
- Les livrets de compétences : *nouveaux outils pour l'évaluation des acquis*
  Rapport IGEN - Alain HOUCHOT, Florence ROBINE

II. Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes

À l'école primaire, comme au collège et au lycée, la résolution de problèmes est placée au centre de l'activité mathématique des élèves. Les programmes mettent l'accent sur les mêmes objectifs et les mêmes compétences.

- ***Extraits du décret, relatif au socle commun, n°2006-830 du 11 juillet 2006.***

« La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité. »

- ***Extraits des documents d'accompagnement du programme de 3e***

« Les programmes des quatre années du collège ont été conçus pour permettre une véritable activité mathématique de l'élève, par la résolution de problèmes.»

- ***Extrait du « Vade-mecum pour les mathématiques Sept. 2009 ».***

« Les nouveaux programmes de mathématiques du collège, publiés au B.O. spécial n° 6 du 28 août 2008, … créent des exigences nouvelles pour la formation et l'évaluation des élèves…
Pour donner du sens aux mathématiques enseignées et cultiver chez les élèves le goût de faire des mathématiques, les programmes recommandent d'introduire certaines notions au travers d'une situation-problème. L'intérêt de cette démarche est de montrer la pertinence de l'outil construit pour la résolution du problème. »

- ***Extrait du B.O. n°30 du 23 juillet 2009 : « Programmes de mathématiques classe de seconde »***

« Dans la mesure du possible, les problèmes posés s'inspirent de situations liées à la vie courante ou à d'autres disciplines. Ils doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves. Au niveau d'une classe de seconde de détermination, les solutions attendues sont aussi en général simples et courtes. »

III. Tâche simple / tâche complexe

Le programme international PISA* de l'OCDE** pour le suivi des acquis des élèves existe depuis 1997. Des évaluations sont conduites tous les trois ans. Les résultats obtenus lors des différentes enquêtes de PISA montrent que **les élèves français réussissent très correctement les tâches simples mais rencontrent des difficultés lorsqu'il s'agit d'effectuer une tâche dite« complexe »** .

*****PISA : *Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves*
******OCDE : *Organisation de Coopération et de Développement Économique*

Qu'est ce qu'une tâche simple ? Qu'est ce qu'une tâche complexe ?

- **Une tâche simple** est une tâche qui incite davantage à des reproductions de procédures. Une tâche simple permet de travailler ou d'évaluer des **savoirs** et des **savoir-faire,** elle laisse peu d'initiative à l'élève.

Savoirs et savoir-faire

Les savoirs et les savoir-faire sont les « capacités » énoncées dans les programmes. Ceux-ci sont présentés, dans les deux cycles, sous forme de tableaux en trois colonnes : connaissances ; capacités et commentaires.

- **Une tâche complexe** est une tâche mobilisant plusieurs ressources. Dans ce contexte, complexe ne veut pas dire compliqué. Une tâche complexe ne se réduit pas à l'application d'une procédure automatique, mais nécessite l'élaboration d'une stratégie (pas forcément experte). Chaque élève peut adopter une démarche personnelle de résolution pour réaliser la tâche. Une tâche complexe conduit les élèves à exprimer de véritables **compétences** dans des situations nouvelles.

Compétences

Petite rupture lexicale, ce qui était préalablement désigné comme des compétences dans les programmes n'est plus considéré comme telles. Ces ex-compétences sont dorénavant classées parmi les capacités.

Une définition du mot *compétence* :

Aptitude à mobiliser un ensemble de ressources (savoirs ; savoir-faire, savoir-être) adaptées dans une situation complexe[1] et authentique[2].

[1] Situation complexe : il s'agit bien de « tâches complexes ».

[2] Authentique : il s'agit de contextualiser un problème, c'est-à-dire de mettre un événement dans son contexte pour lui donner toute sa valeur et son sens.

IV. Tâches simples

Quand on parle de « tâches simples », il s'agit donc de reproductions de procédures. Nous savons faire et nous avons longtemps évalué nos élèves seulement sur ces tâches là.

L'acquisition de ces savoirs et savoir-faire n'est plus une fin en soi, mais ils ne constituent qu'une étape dans la résolution de problèmes.
Dois-je m'inquiéter qu'un élève entrant en seconde ne sache pas résoudre l'équation : 3x=2 ?
Si je m'attache uniquement à l'acquisition d'une technique, la réponse est « oui », mais je me fixe un objectif irréalisable car les savoirs et les savoir-faire s'oublient naturellement, par contre, l'acquisition d'une compétence est pérenne.
Les programmes insistent sur cet état de fait. Ce qui devrait plutôt m'inquiéter, lors de l'accueil de mes nouveaux élèves de seconde est que lors de la résolution d'un problème, les différentes phases du traitement : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats, ne soient pas encore assimilées.

- ***Extrait du B.O. n°30 du 23 juillet 2009 : « Organisation du programme classe de seconde »***

« Le programme … fixe les objectifs à atteindre en termes de capacités et pour cela indique les types de problèmes que les élèves doivent savoir résoudre. »

- ***Extraits des documents d'accompagnement du programme de 3^e^***

« La réduction des apprentissages mathématiques à l'acquisition d'automatismes ne fait qu'accentuer blocages, rejets et perte de sens de l'école. »

- ***Extrait du B.O. n°30 du 23 juillet 2009 : « Organisation du programme classe de seconde »***

« Le calcul est un outil essentiel pour la pratique des mathématiques dans la résolution de problème. Il est important en classe de seconde de poursuivre l'entraînement des élèves dans ce domaine par la pratique régulière du calcul mental, du calcul numérique et du calcul littéral. L'utilisation d'outils logiciels de calcul – sur calculatrice ou sur ordinateur – contribue à cet entraînement. »

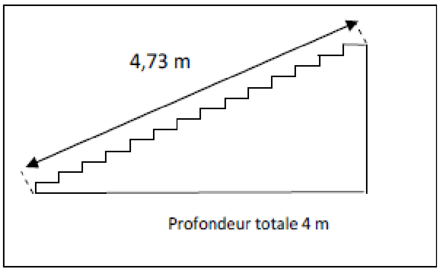
V. Tâches complexes

1. Exemples de tâches complexes pour la troisième

Voici quelques situations-problèmes abordées en troisième et qui pourraient être reprises en début d'année scolaire en seconde.
Certaines tâches complexes ont été expérimentées en classe de troisième ou autre, et sont annotées de préconisations qui précisent les objectifs de l'enseignement des mathématiques au collège et leur poursuite au lycée.

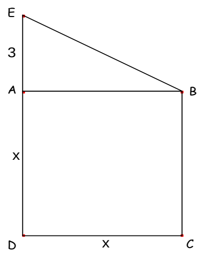
Exemple 1 : l'escalier (*vade-mecum, version de septembre 2009*)

Pour qu'un escalier soit conforme aux normes, la hauteur de chaque marche doit être comprise entre 17 cm et 20 cm. L'escalier représenté sur le schéma ci-contre est-il conforme aux normes ?



Une élève a demandé l'aide de son père menuisier qui a donné la réponse en réalisant un schéma « au dixième ».
Cette approche est à mettre en exergue lors de la correction.

Exemple 2 : Nombres et Calculs



ABCD est un carré,

ABE un triangle rectangle en A.

Pour quelle valeur de x, l'aire du carré ABCD

est-elle égale à celle du triangle ABE ?

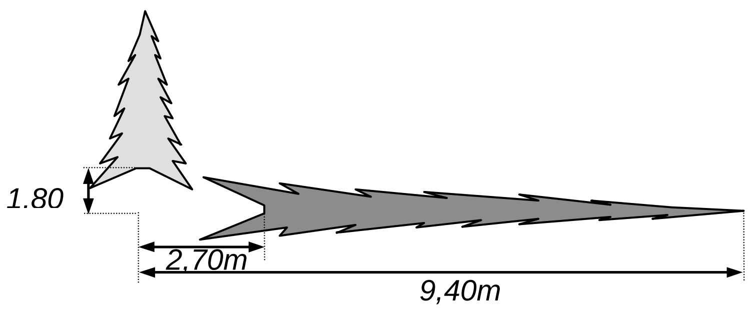
Attention : Les dimensions ne sont pas respectées sur la figure.

Voici un texte où l'auteur souhaitait faire résoudre l'équation : $1,5x = x^2$.
Posé sans l'introduction de la lettre « x », le problème est ouvert et laisse la possibilité d'un raisonnement avec les figures usuelles de géométrie.
Voici une solution, proposée par Monsieur FELLONEAU, IA-IPR, que peu d'élèves sont susceptibles de fournir, car ils n'ont pas été habitués à cela :
« Un triangle c'est un demi-rectangle, donc le carré doit avoir une aire moitié de celle du rectangle. Je partage le rectangle en deux dans le bon sens et je dois obtenir deux carrés. Donc AB=1,5. »

Exemple 3 : (*d'après Olympiades mathématiques belges*)

Une balle flottait sur un lac lorsque celui-ci gela. Sans rompre la glace, on a ôté la balle, qui a laissé un trou de 24cm de diamètre et de 8cm de profondeur.
Quel est le rayon de la balle, en centimètres ?

Exemple 4 : CONFIGURATIONS GÉOMÉTRIQUES



Au sol se projette l'ombre d'un conifère.
On peut effectuer quelques mesures.
Quelle est la hauteur de cet arbre?

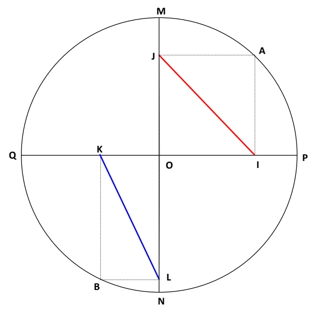
Exemple 5 : CONFIGURATIONS GÉOMÉTRIQUES

(Documents ressources pour le collège - Raisonnement et démonstration – Éduscol).

Une corde non élastique de 101 mètres est attachée au sol entre deux piquets distants de 100 mètres. Tam tire la corde en son milieu et la lève aussi haut qu'il peut.
Sachant qu'il mesure 1,68 m, peut-il passer en dessous sans se baisser ?

Exemple 6 : CONFIGURATIONS GÉOMÉTRIQUES

(Documents ressources pour le collège - Géométrie – Éduscol).



La figure ci-contre représente un cercle de centre O et deux de ses diamètres perpendiculaires.
OIAJ et OKBL sont deux rectangles.
Quel est le plus long des deux segments [IJ] ou [KL] ?

Exemple 7 : Organisation et gestion de données (Collège Pierre Mendès France – Brevet blanc, janvier 2010)

1° Un randonneur parcourt 5 km en 1 heure et 15 minutes. Quelle est sa vitesse moyenne en km/h ?
2° Une voiture roule à la vitesse de 50 km/h. En combien de temps parcourt-elle 110 kilomètres ? Donner le résultat en heures et minutes.

Solution donnée par l'auteur

1. *Un randonneur parcourt 5 km en 1 heure et 15 minutes. Pour calculer sa vitesse moyenne en km/h il faut déterminer combien de kilomètres il parcourt en 1 heure = 60 minutes.*
   $V = \frac{d}{t} = \frac{5km}{1h15min} = \frac{5km}{75min} = \frac{?Km}{60min}$ *et* $? = \frac{60\times5}{75} = \mathbf{4km/h.}$

2. *Une voiture roule à la vitesse de 50 km/h. Pour calculer combien de temps il faut pour parcourir 110 kilomètres, on peut utiliser le tableau de proportionnalité :*

Distance en km	*50*	*110*
Temps en minutes	*60*	*?*

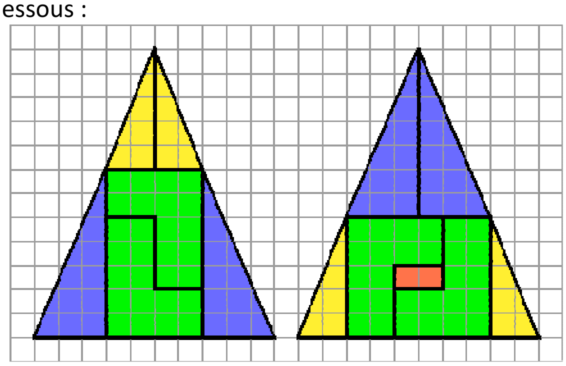
$? = \frac{110\times60}{50} = 132minutes = 2\times60 + 12min = \mathbf{2h12min}$

***Une autre solution**, que peu d'élèves sont susceptibles de fournir, car les élèves se réfugient toujours dans les automatistes enseignés.*

1. *Un randonneur parcourt 5 km en 1 heure et 15 minutes. Ce randonneur parcourt 1km en 15minutes, donc 4 km en quatre fois plus de temps soit 60 minutes, soit une heure.*
   *Sa vitesse est donc de **4km/h.***
2. *Une voiture roule à la vitesse de 50 km/h, donc en 2heures elle aura parcouru 100km.*
   En 120 minutes elle parcourt 100km,
   En 12minutes elle parcourt 10 km.
   *Il lui faut donc pour parcourir 110 kilomètres elle mettra **2h12min.***

Exemple 8 :

Regardez les deux figures ci-dessous :

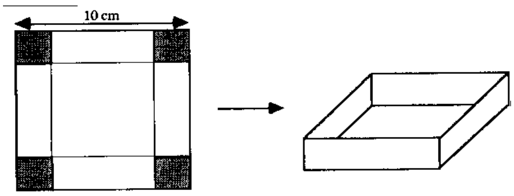


Les parties de la première figure ont été regroupées différemment pour former la seconde, à la différence qu'il faut ajouter à cette dernière deux petits carrés. Comment expliquer la présence de ces deux petits carrés ?

2. **Exemples de tâches complexes pour la troisième et la seconde**

Voici quelques situations-problèmes qui peuvent être abordées en troisième et dont l'étude pourrait être reprise et prolongée en seconde.

Exemple 9 : Patrons de récipients (Documents ressources pour le collège - du numérique au littéral – et documents ressources pour la classe de seconde – Fonctions –Éduscol).



On dispose d'une plaque de carton carrée de 10 cm de côté. Dans chaque coin de la plaque, on découpe un carré comme indiqué sur le dessin. On obtient alors le patron d'une boîte parallélépipédique, sans couvercle.

Questionnements possibles :

- En fonction du côté de l'encoche, calculer l'aire et le volume de la boîte.
- Quelle doit être la mesure du côté de l'encoche pour que le volume de la boîte soit 72 cm^3 ?
- Quel est le maximum du volume de la boîte ?

Exemple 10 : DNB 2007 (Documents ressources pour la classe de seconde- Algorithmique –Éduscol)

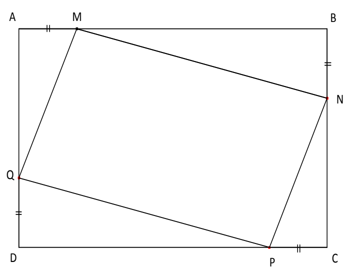
On donne le programme de calcul suivant :

- choisir un nombre
- lui ajouter 4
- multiplier la somme obtenue par le nombre choisi
- ajouter 4 à ce produit
- écrire le résultat

Quel type de nombre retourne ce programme ?

Plusieurs activités sont possibles : tester le programme avec un tableur, écrire l'algorithme avec des noms de variables (cela le clarifie très nettement), et le faire fonctionner effectivement.

Exemple 11 : Le quadrilatère tournant (Documents ressources pour la classe de seconde- Fonctions –Éduscol.



On considère un rectangle ABCD de dimensions données, AB = 8cm, AD = 6cm.
Sur le côté [AB], on choisit un point M quelconque.
On considère ensuite les points N sur [BC], P sur [CD] et Q sur [DA] tels que : AM = BN = CP = DQ.
On s'intéresse aux variations de l'aire ou du périmètre du quadrilatère MNPQ.
Où faut-il placer le point M pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit la plus petite possible ?

Questionnements possibles :

- Si on connaît la valeur de AM, peut-on déterminer la valeur de l'aire ? du périmètre ?
- Peut-on construire un quadrilatère dont l'aire est égale à un nombre donné ?
- Comment varie l'aire de MNPQ? (charge à l'élève de dire « varie mais en fonction de quoi ? »)
- Est-il possible de placer le point M de sorte que l'aire de MNPQ soit la plus grande possible, la plus petite possible ?
- Est-il possible de placer le point M de sorte que le périmètre de MNPQ soit le plus grand possible, le plus petit possible ?

Activités possibles des élèves :

- *À l'aide d'un logiciel, représenter les courbes donnant l'aire et le périmètre en fonction de AM.*
- *Déterminer expérimentalement les valeurs minimales et maximales de l'aire et du périmètre.*
- *Calculer l'aire, le périmètre.*
- *Déterminer le maximum et le minimum de l'aire.*
- *À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer le minimum du périmètre ou à l'aide d'un logiciel de calcul numérique, en déterminer une valeur approchée.*

Exemple 12 : Sécurité routière (Banque pour la culture scientifique)

Situation : Nous avons appris, dans le cadre de l'éducation à la sécurité routière, que la distance de freinage d'un véhicule dépend de sa vitesse. Mais comment varie cette distance en fonction de la vitesse ?

1. La distance d'arrêt D_a est la distance parcourue par un véhicule entre le moment où le conducteur perçoit un obstacle et l'arrêt complet du véhicule. Elle est la somme entre deux termes : $D_a = D_r + D_f$.

D_r est la distance de réaction. C'est la distance parcourue par le véhicule entre le moment où le conducteur voit l'obstacle et celui où il commence à freiner.

D_f est la distance de freinage. La distance de freinage dépend de la vitesse du véhicule, de l'état du véhicule et de l'état de la chaussée.

2. Le tableau suivant présente la distance de freinage sur route sèche d'un véhicule correctement entretenu ainsi que la distance de réaction pour un automobiliste dont le temps de réaction est de 1 seconde pour différentes vitesses (notée *v*) du véhicule.

v (en km/h)	0	30	60	90	100	110	130
D_f (en m)	0	5,6	22,2	50,0	61,7	74,7	104,3
D_r (en m)	0	8,3	16,7	25,0	27,8	30,6	36,1

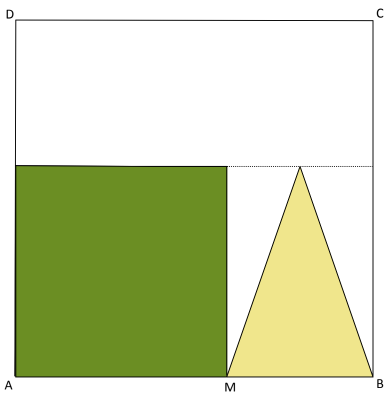
Consignes données à l'élève

À l'aide d'un tableur, réaliser un graphique qui vous permettra de répondre à la question suivante : la distance de freinage d'un véhicule croît-elle proportionnellement à la vitesse ?

Répondre par écrit à cette question en justifiant la réponse.

Exemple 13 : Une même situation pour divers problèmes

(Documents ressources pour la classe de seconde- Fonctions –Éduscol)

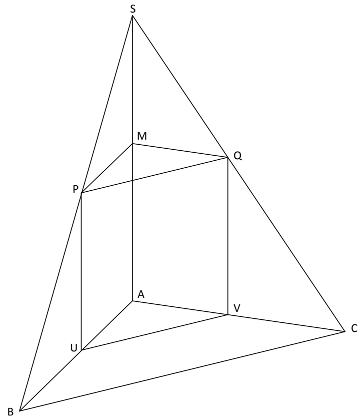


Le carré ABCD a un côté de longueur 8 cm. M est un point du segment [AB]. On dessine comme ci-contre dans le carré ABCD, un carré de côté [AM] et un triangle isocèle de base [MB] et dont la hauteur a même mesure que le côté [AM] du carré.

Questionnements possibles :

- On voudrait que le motif, constitué par le carré et le triangle, ait une aire égale à la moitié de celle du carré ABCD. Quelles dimensions faut-il donner au motif ?
- Est-il possible que l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ?
- Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit la plus grande possible ?
  Si oui préciser dans quel(s) cas ?
- Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit plus grande que l'aire du carré ?
  Si oui préciser dans quels cas c'est possible.
- Comment évolue l'aire du motif en fonction de AM ? en fonction de MB ?

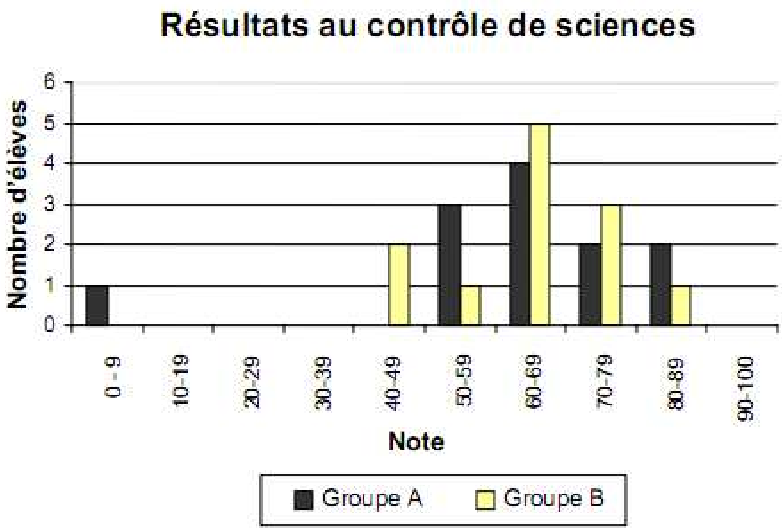
Exemple 14 : Espace (cette activité est extraite de la brochure «Faire des mathématiques avec l'ordinateur au lycée» tome 2 réalisée en 1996 par la DISTENB2 et publiée par le CRDP de Champagne-Ardenne)



Soit SABC un tétraèdre tel que la droite (SA) soit perpendiculaire au plan (ABC), et tel que le triangle ABC soit rectangle et isocèle en A.
Par un point M variable de l'arête [SA] du tétraèdre (SABC), on mène un plan (F) parallèle au plan (ABC). Ce plan coupe respectivement les arêtes [SB] et [SC], en P et Q. Les points M, P, Q, se projettent orthogonalement en A, U, V, sur le plan (ABC).
On demande d'optimiser le volume V du prisme (MPQAUV) lorsque le point M décrit l'arête [SA].
On prendra SA=3,6 et AB=2,4.
Remarque: ce volume est une fonction positive du paramètre fixant la position de M sur [SA]. Il est nul lorsque M est en S ou en A. La fonction étant intuitivement continue, il existe donc au moins un point M de l'arête [SA] pour lequel ce volume est maximal.

Un exemple de situation de l'espace conduisant à l'optimisation d'une fonction.

Exemple 15 : Résultats à un contrôle (d'après PISA)
Le graphique ci-dessous montre les résultats à un contrôle de sciences obtenus par deux groupes d'élèves désignés par « groupe A » et « groupe B ».



La note moyenne pour le du groupe A est de 62 et pour le groupe B de 64,5. On considère que les élèves réussissent e contrôle lorsque leur note est supérieure ou égale à 50.
Sur la base de ce graphique, le professeur conclut que le groupe B a mieux réussi ce contrôle que le groupe A.
Les élèves du groupe A ne sont pas d'accord avec le professeur. Ils essaient de le convaincre que le groupe B n'a pas nécessairement mieux réussi.
En vous servant du graphique, donnez un argument mathématique que les élèves du groupe A pourraient utiliser.

Exemple 16 : Le jeu du lièvre et de la tortue

(Documents ressources pour la classe de seconde- Algorithmique –Éduscol)

À chaque tour, on lance un de. Si le 6 sort, alors le lièvre gagne la partie, sinon la tortue avance d'une case. La tortue gagne quand elle a avance 6 fois.
Le jeu est-il à l'avantage du lièvre ou de la tortue ?

Cet exercice de probabilités s'insère dans le cadre de la simulation, et par conséquent de l'approche dite fréquentiste des probabilités. Ce problème se prête à une démarche algorithmique.

Exemple 17 : Coïncidence de date d'anniversaire dans une classe

(Documents ressources pour la classe de seconde- Algorithmique –Éduscol)

Quelle est la probabilité que dans une classe de 30 élèves, il y ait au moins deux élèves qui partagent la même date d'anniversaire ?

Dans la vie courante certaines coïncidences apparaissent extraordinaires (comme rencontrer par hasard quelqu'un de connu à des centaines de kilomètres de chez soi). Malheureusement bien souvent ces coïncidences ne se prêtent pas facilement à une modélisation qui permettrait un calcul de probabilité ou une simulation.
Le problème évoqué dans ce paragraphe ne pose pas de grandes difficultés de modélisation; pour autant, le résultat s'avérera sans doute étonnant pour de nombreux élèves.
Sa mise en place algorithmique peut être l'occasion de travailler des questions proches de celles des tris qui font souvent intervenir deux boucles imbriquées. Pour effectuer une simulation, il s'agit dans un premier temps de tirer les 30 dates d'anniversaires au sort (parmi 365 jours, en supposant les dates d'anniversaire uniformément reparties sur l'année civile); il faudra ensuite chercher si deux dates coïncident.