LA DEMI-VIE EN RADIOACTIVITE.

UN OUTIL POUR RESOUDRE DES PROBLEMES

Groupe Mathématiques et Sciences Physiques au Lycée
IREM de Toulouse
Michèle Fauré, Pierre López, Monique Mandleur, Monique Sosset

Rédacteur : Monique Sosset

En cours de sciences physiques en Terminale Scientifique, au moment de l'étude de la radioactivité, on utilise traditionnellement le passage de la fonction exponentielle à la fonction logarithme pour résoudre des problèmes de détermination de durées. Or, au moment où est traité le cours sur la radioactivité en sciences physiques, la fonction logarithme n'a pas, en général, fait encore l'objet d'un enseignement en cours de mathématiques.

Nous proposons une méthode de résolution de ce type de problème mettant en jeu la notion de demi-vie qui évite l'emploi de la fonction logarithme. Ainsi, nous donnons à la notion de demi-vie qui est un « objet » d'enseignement en sciences physiques (programmes 2002), un aspect « outil ».

On expose ici cette méthode à partir d'un exercice pris dans le livre de Physique de Terminale S (éditeur Nathan collection Tomasino).

I . Enoncé de l'exercice.

Le Thorium $^{237}_{90}\mathrm{Th}$ est radioactif et émetteur α. La demi-vie radioactive (ou période) du thorium 237 est égale à 18 jours. On dispose initialement (t = 0) d'une source radioactive de thorium de masse $m_0 = 1\ \mu\mathrm{g}$.

***a .** Ecrire l'équation de sa désintégration sachant qu'elle produit du radium Ra.*
Calculer la masse de thorium 237 restante aux deux dates t_1 = 36 jours et t_2 = 6 mois.

***b .** A quelles dates la masse de thorium 237 restante est-elle de $0{,}0156\ \mu\mathrm{g}$ et de $0{,}0039\ \mu\mathrm{g}$?*

***c .** A quelle date la masse de thorium 237 restante est-elle voisine de 1 ng ?*

II . Solution avec la méthode classique.

a. $$^{237}_{90}\mathrm{Th} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{233}_{88}\mathrm{Ra}$$

A partir de la loi de décroissance radioactive $N(t) = N_0 e^{-\lambda . t}$, la masse m de thorium restante à la date t est donnée par la relation : $m = m_0 . e^{-\lambda . t}$ où m_0 est la masse initiale à la date t = 0 et λ la constante de désintégration radioactive.

1 . Evaluation de la constante de désintégration radioactive λ.

Au bout d'un temps $t_{\frac{1}{2}}$ écoulé égal à une demi-vie[1], il reste la moitié de la masse initiale.

Soit : $\dfrac{m_0}{2} = m_0 . e^{-\lambda . t}$ Soit $\dfrac{1}{2} = e^{-\lambda . t_{\frac{1}{2}}}$ Il s'ensuit : $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\ln 2}{18}$.

2 . Détermination des masses restantes selon la question posée.

α **.** Au bout de 36 jours, la masse [2] restante est :

$$m = m_0 . e^{-\lambda . 36} = e^{-\lambda\, 36} = 0{,}25\ \mu\mathrm{g} \text{ puisque } m_0 = 1\ \mu\mathrm{g}.$$

---

[1] $t_{\frac{1}{2}}$ est la notation officielle qui n'est pas sans poser de problème (voir notes 3 et 4).

[2] En ce qui concerne la valeur de la masse, nous ne nous attarderons pas ici sur la question des chiffres significatifs ou de précision.

β . Au bout de 6 mois soit environ 180 jours, la masse restante est :

$$m = e^{-\lambda.180} = 9{,}8.10^{-4}\ \mu g\ .$$

b. La masse restante est égale à 0,0156 µg au bout du temps t tel que :

$$0{,}0156 = e^{-\lambda.t}\ ,\ \text{soit}\ t = -\frac{1}{\lambda}.\ln 0{,}0156 = 108\ \text{jours au jour près}\ .$$

De même, la masse restante est égale à 0,0039 μg au bout du temps t tel que :

$$0{,}0039 = e^{-\lambda.t}\ .\ \text{Soit}\ t = -\frac{1}{\lambda}.\ln 0{,}0039 = 144\ \text{jours au jour près}$$

c . La masse restante est égale à 1 ng au bout du temps t tel que :

$$0{,}001 = e^{-\lambda.t}\quad \text{Soit}\ t = -\frac{1}{\lambda}.\ln 0{,}001 = 179\ \text{jours au jour près}\ .$$

Commentaire sur cette méthode.

On voit comment cette méthode fait intervenir de façon classique l'utilisation de la fonction logarithme népérien en tant que fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Comme on l'a dit plus haut, au moment où les physiciens étudient la radioactivité avec leurs élèves, la fonction logarithme n'a pas été étudiée dans le cours de Mathématiques. Si l'utilisation de la touche "ln" de la calculatrice pour les applications numériques ne pose pas a priori de problème pédagogique, il nous semble préférable d'éviter son emploi prématuré dans le cours de Sciences Physiques.

En effet, l'introduction du logarithme népérien dans le cours de sciences physiques peut nuire à la construction de cette fonction en cours de mathématiques.

III . Proposition d'une autre méthode de résolution.

1 . Principe de la méthode.

Nous proposons ici une autre méthode de résolution qui rend opératoire de façon effective la notion de demi-vie essentielle dans le cours de Physique.

En effet, il s'agit que les élèves aient bien compris que si la masse de l'échantillon radioactif est divisée par deux au bout d'une durée égale à une demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$, elle sera divisée par quatre (2^2) au bout de deux demi-vies, divisée par huit (2^3) au bout de trois demi-vies etc…

L'idée de la méthode en découle.

Il s'agit de trouver la puissance de 2 la plus proche de la valeur du rapport entre la masse restante et la masse initiale, ce qui permettra de déterminer le nombre de demi-vies écoulées.

Illustrons-le sur cet exemple.

2 . Application à l'exercice précédent.

Il suffit donc de considérer que si au bout du temps $t_{\frac{1}{2}}$ la masse restante est égale à $\frac{m_0}{2}$, au bout du temps $2t_{\frac{1}{2}}$ elle sera égale à $\frac{1}{2}(\frac{m_0}{2})$, soit $\frac{m_0}{2^2}$, au bout du temps $3t_{\frac{1}{2}}$ elle vaudra $\frac{m_0}{2^3}$ et ainsi de suite.

a . Pour $t_1 = 36$ jours, on remarque que t_1 représente 2 demi-vies.[3] Donc la masse restante sera égale à $\frac{m_0}{2^2} = 0{,}25\ \mu g$

De même, pour $t_2 = 6$ mois soit environ 180 jours, t_2 représente 10 demi-vies. [4]

Donc la masse restante sera égale à $\frac{m_0}{2^{10}} = 9{,}8.10^{-4}\ \mu g$

On aura remarqué que la détermination de λ n'est ici pas nécessaire.

b . Quand la masse restante vaut $0{,}0156\,\mu g$, la masse a diminué dans le rapport :

$$\frac{m_0}{m} = \frac{1}{0{,}0156} = 64{,}1\ .$$

En programmant à l'aide de la calculatrice la suite de terme général 2^n pour des valeurs de n augmentant de 1 en 1 à partir de la valeur 0 , on obtient un tableau des valeurs des puissances de 2. On détecte ainsi que la puissance de 2 la plus proche du nombre 64,1 est 64 soit 2^6.

Il s'est donc écoulé 6 demi-vies. Soit une durée de $6\times18 = 108$ jours.

[3] On ne manquera pas d'être « amusé » par la notation : $t_1 = 2\,t_{\frac{1}{2}}$!

[4] Ici : $t_2 = 10\,t_{\frac{1}{2}}$!

Quand la masse restante vaut 0,0039 μg, la masse a diminué dans le rapport :

$$\frac{m_0}{m} = \frac{1}{0{,}0039} = 256{,}4$$

D'après le tableau, la puissance de 2 la plus proche du nombre 256,4 est 256 soit 2^8.

Il s'est donc écoulé 8 demi-vies. Soit une durée de environ 8×18 = 144 jours.

c . Quand la masse restante vaut 0,001 μg, la masse a diminué dans le rapport :

$$\frac{m_0}{m} = \frac{1}{0{,}001} = 1000$$

D'après le tableau, la puissance de 2 la plus proche de ce nombre est 1024 soit 2^{10}.

Il s'est donc écoulé 10 demi-vies. Soit une durée de environ 10×18 = 180 jours.

Commentaire sur cette deuxième méthode.

Nous constatons qu'avec cette méthode nous trouvons au **b)** les mêmes valeurs que précédemment avec la première. Au **c)**, il y a une différence de 1 jour, différence < 1 % , donc non significative d'un point de vue physique.

Les valeurs sur lesquelles nous avons travaillé sont proches de puissances de 2. Il en est de même dans la plupart des exercices que l'on peut trouver dans les livres actuels. Bien sûr, ceci n'est pas général.

La question se pose donc de savoir quelle est la pertinence de cette méthode dans le cas général.

4 . Envisageons la question supplémentaire suivante.

A quelle date la masse de Thorium restante est elle voisine de 0,0059 ng ?

Par la première méthode, la masse restante est égale à 0,0059 ng au bout du temps t tel que :

$0{,}0059 \times 10^{-3} = e^{-\lambda . t}$ Soit $t = -\frac{1}{\lambda} . \ln 5{,}9 \times 10^{-6} = 313$ jours au jour près.

Par la deuxième méthode, $\frac{m_0}{m} = \frac{1}{0{,}0059 \times 10^{-3}} = 169491{,}5$

La puissance de 2 la plus proche étant 2^{17} , il s'est donc écoulé 17 demi-vies. Soit une durée de environ 18×17=306 jours.

L'erreur [5] est de $\frac{7}{310} = 0{,}022$. Soit : 2,2%

Commentaire.

On peut se poser la question de savoir laquelle de ces deux valeurs est la "meilleure".
Mais en fait, **est-ce une bonne question ?**

En effet, ce qu'il faut savoir d'un point de vue physique, c'est que la désintégration est un phénomène statistique **modélisé** par la loi :
$N = N_0.e^{-\lambda t}$.

Les calculs exacts faits à partir de cette loi ne traduisent donc pas une réalité déterminée. Le nombre N à la date t est une valeur moyenne[6].

En d'autres termes, le calcul exact avec la fonction logarithme n'a pas de signification physique. C'est l'ordre de grandeur qui est important et la méthode de calcul du temps de demi-vie donne cet ordre de grandeur.

On peut donc résumer ce que nous venons de voir en disant que la radioactivité peut être abordée sous l'angle de deux modèles différents[7].

L'un est basé sur la loi : $N = N_0.e^{-\lambda t}$, et dans lequel il est alors légitime de faire des calculs « exacts » utilisant la fonction logarithme. Il est important d'insister sur le fait que la légitimité des calculs est interne au modèle.

L'autre est basé uniquement sur la notion de demi-vie et dans le type de problème évoqué aboutit à des ordres de grandeurs. A nouveau, le fait de savoir si une réponse est vraie ou fausse est déterminé de manière interne au modèle.

Se pose alors la question de la pertinence du modèle par rapport au phénomène physique.

On aura compris, vu une remarque déjà faite sur le caractère statistique de la radioactivité, que le second modèle est tout à fait pertinent[8].

IV . Conclusion.

Nous avons montré que, dans le type de problème étudié, le passage par la fonction logarithme ne paraît pas forcément indispensable. D'autre part, la notion de demi-vie au programme de Sciences Physiques prend dans cette méthode un caractère opératoire. Cela devrait faciliter l'harmonisation des enseignements de Mathématiques et de Sciences Physiques en classe de Terminale S,

---

[5] La méthode par demi-vie pourrait être améliorée en procédant à une interpolation linéaire entre 17 et 18 demi-vies. Mais comme on le verra plus bas, ce n'est pas forcément pertinent.

[6] Nous développerons ces aspects statistiques lors d'une étude ultérieure sur l'enseignement de la radioactivité en Sciences Physiques.

[7] En fait, un troisième méthode possible serait d'envisager une démarche graphique basée sur la lecture d'antécédents à partir du graphe représentatif de la fonction N = f(t).

[8] On n'évoque pas ici les questions de vérification expérimentale.

notamment en ce qui concerne l'enseignement de la fonction logarithme népérien. Et ceci au plus grand profit des élèves.

Par ailleurs, nous pensons avoir montré comment un travail en commun entre professeurs de mathématiques et de sciences physiques peut déboucher sur des propositions concrètes concernant les techniques mathématiques utilisées.

C'est l'esprit dans lequel nous travaillons au sein du groupe, et nous tenons à remercier l'IREM pour les possibilités de réflexion qu'il nous offre.